УДК 550.831+550.838
№ госрегистрации О 196 U 004 773
Инв. №

Национальная академия наук Украины
Институт геофизики им. С. И. Субботина
03142, г. Киев, 142, пр. Палладина, 32; тел. (044) 444 31 05; факс 450 25 20

УТВЕРЖДАЮ
Директор Института геофизики
им. С. И. Субботина НАН Украины
академик

В. И. Старостенко
«   » декабря 2000 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ:

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ПО МОДУЛЮ ЕГО ГРАДИЕНТА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИ И В ТЕОРИИ ИСТОЛКОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

(заключительный)

Руководитель темы, профессор,
доктор физико-математических наук **А. В. Черный**

2000 г.

Рукопись закончена « 25 » ноября 2000 г.

Результаты этой работы рассмотрены Ученым Советом ИГФ,

протокол № 8 от « 7 » декабря 2000 г.

УДК 550.831+550.838
№ госрегистрации О 196 U 004 773
Инв. №

Национальная академия наук Украины
Институт геофизики им. С. И. Субботина
03142, г. Киев, 142, пр. Палладина, 32; тел. (044) 444 31 05; факс 450 25 20

УТВЕРЖДАЮ
Директор Института геофизики
им. С. И. Субботина НАН Украины
академик
В. И. Старостенко
«   » декабря 2000 г.

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ:

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ПО МОДУЛЮ ЕГО ГРАДИЕНТА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ГРАВИМЕТРИИИ И В ТЕОРИИ ИСТОЛКОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

(заключительный)

Руководитель темы, профессор,
доктор физико-математических наук
А. В. Черный

2000 г.

Рукопись закончена « 25 » ноября 2000 г.
Результаты этой работы рассмотрены Ученым Советом ИГФ,
протокол № от « 7 » декабря 2000 г.

Список исполнителей

Руководитель НИР, ведущий научный сотрудник, профессор,
доктор физико-математических наук **Черный А. В.** (реферат, введение, заключение, гл. 1, 2)
Старший научный сотрудник,
кандидат физико-математических наук **Черная Н. Н.** (гл. 3)
Научный сотрудник,
кандидат физико-математических наук **Черная О. А.** (гл. 2)
Младший научный сотрудник **Дубовенко Ю. И.** (п.п. 3.2.2, 3.2.3)
Младший научный сотрудник **Якимчик А. И.** (п.п. 1.1, 1.2, 1.3, 1.6)

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР: 177 с., 107 источников.

Объектом исследования являются линейные и нелинейные, давно поставленные и вновь сформулированные граничные прямые и обратные задачи теории потенциала. Особое внимание уделяется двум крупным проблемам. Первая из них состоит в изучении новой нелинейной граничной задачи восстановления потенциала притяжения в неограниченной замкнутой области по значениям модуля его градиента на границы области при условии близости потенциала к заданному. Вторая связана с исследованием линейных и нелинейных обратных задач гравиразведки.

В плане изучения первой проблемы доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения задачи, установлена корректность ее постановки, указан эффективный способ его решения. На базе созданной теории развит новый подход к решению основной задачи теории фигуры Земли, связанный с вычислением аномальных высот.

В рамках исследования второй проблемы сформулированы и решены обратные задачи логарифмического потенциала для тел ограниченного, близкого к кругу, и неограниченного, близкого к слою постоянной толщины, с известной постоянной плотностью без существенных ограничений на размерность конечномерных пространств, аппроксимирующих функциональные пространства данных

и решений в рамках общей теории приближенного решения условно корректных задач. Описаны условия корректной разрешимости задачи для контактной поверхности при условии задания поля на коротком интервале.

Ключевые слова: Граничные, линейные и нелинейные, прямые и обратные, корректные и условно-корректные задачи теории потенциала в нормированных функциональных пространствах; модуль градиента потенциала; теоремы существования, единственности и устойчивости решений; численное моделирование; алгоритм.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . .

1. **Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента** . . . .

1.1. История проблемы . . . .

1.2. Характеризация силы тяжести . . . .

1.3. Оценка уклонения решений задачи Дирихле для уравнения аномалий силы тяжести и для уравнения Лапласа 2

1.4. Определение потенциала притяжения 3

1.5. Вопросы разрешимости задачи 3

1.6. Вычисления аномальных высот 5

2. **Обратные задачи теории логарифмического потенциала для тел, близких к заданным** 6

2.1. Постановка задач определения формы некоторых тел, близких к заданным 6

2.1.1. Преобразование подынтегральной функции 6

2.1.2. Интегральное уравнение задачи 7

2.1.3. Последовательные приближения контура тела, близкого к слою постоянной толщины 7

2.1.4. Преобразование интегрального уравнения в связи с условием (2.15) . . 7

2.2. Последовательности линейных интегральных уравнений для восстановления звездных областей . . 8

2.3. О характеристических свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения областей 8

2.4. Условия разрешимости задач 9

2.5. Функционалы в задачах определения областей 9

2.6. Вариационный принцип отбора допустимых решений 10

2.7. Построение регуляризующих операторов определения областей 10

2.7.1. Сглаживание входных данных задачи (1.10) 10

2.7.2. Сглаживание данных в задачах определения финитного контакта 12

2.7.3. Сглаживание данных задачи (1.23) 13

2.7.4. Глобальный регуляризующий алгоритм определения ограниченной области 13

2.7.5. Глобальный регуляризующий алгоритм определения финитного контакта 13

2.7.6. Глобальный регуляризующий алгоритм решения задачи (1.23) 14

3. **О корректной разрешимости обратной задачи для контактной поверхности при условии задания поля на коротком интервале** 14

3.1. Определения множеств входных данных 14

3.2. Регуляризующие алгоритмы приближенного решения задачи 14

3.3.1. Преобразования операторов задачи 14

3.2.2. Конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов 15

3.2.3. Модель алгоритма определения контакта на коротком профиле 16

Заключение 16

Перечень ссылок 16

ВВЕДЕНИЕ

Исследования, результаты которых излагаются в данной работе, продолжают начатое в 70-е годы изучение модуля градиента потенциала [1-7] и включают разработки ряда новых проблем теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий [8-29]. Постановка исследований распределения значений модуля градиента потенциала обусловлена тем, что до сих пор не разработаны эффективные методы извлечения необходимой информации об особенностях глубинной структуры коры и мантии Земли из данных изменений гравитационного и магнитного полей, которые накоплены к настоящему времени в больших объемах. Идеи и методы созданных теорий, несмотря на их разнообразие и общность, дают возможность решать ту или иную прикладную задачу по этим данным в областях достаточно малой меры (по сравнению с размерами Земли). Это связано с тем, что используемые методы созданы на базе классических линейных граничных задач потенциала, гармонических и аналитических функций, тогда как поля значений модуля градиента потенциала описываются такими функциями весьма приближенно с

тем большей погрешностью, чем больше область, в пределах которой рассматривается та или иная граничная задача.

Целью работы является построение основ теории главной задачи гравиметрии о восстановлении потенциала притяжения $V(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, в неограниченной области ☝$^+$ по значениям модуля его градиента $g(x)=\left|-grad\, V(x)\right|$, заданным на границе ∂☝ области, в предположении, что искомый потенциал близок к заданному $V(x)$. Помимо этого предусматривается также разработка основ теории обратных задач логарифмического потенциала для контактной поверхности и для звездных тел, близких к заданным, без существенных ограничений на размерность пространств, аппроксимирующих пространства данных и решений, в рамках общей теории приближенного решения условно корректных задач.

Основные задачи, поставленные для достижения намеченной цели, формируются следующим образом.

1. Восстановить в неограниченной замкнутой области потенциал притяжения по значениям модуля его градиента при условии близости потенциала к заданному. Попутно вычислить с высокой точностью аномальные высоты.
2. Определить фундаментальные соотношения для вычисления контура тела в виде отклонений от контура заданного тела по известным значениям (логарифмического) потенциала. Изучить характеристические свойства операторов этих соотношений.
3. Исследовать свойства функционалов невязки и типа невязки для уравнений, определяющих приближения контуров возмущающих тел. Построить такие стабилизирующие функционалы, которые целиком и полностью описывали бы множества единственности точных решений этих уравнений.
4. Сконструировать регуляризующие операторы определения звездных областей с использованием адаптивных процедур сглаживания данных измерений, отягощенных большими погрешностями, и обеспечивающие устойчивость при условии задания данных на коротком интервале.

Разработкой первой проблемы развивается *новое научное направление* в теории фигуры Земли и в теории извлечения геологической информации из данных наблюдений, очерченное рамками созданной на предыдущих этапах исследования теории и методов решения важной *нелинейной граничной задачи математической физики* о восстановлении потенциала по значениям модуля его градиента. Теоретические и методологические разработки трех последних проблем имеют характер *дальнейшего развития известных идей и методов теории обратных задач* потенциала и реализации решений этих задач на ЭВМ. Они составляют аналитическое обобщение научных достижений и дополняют их новыми результатами как в теории истолкования аномалий, так и в методах устойчивых вычислений. *Впервые* для восстановления возмущающей звездной области известной постоянной плотности (или намагниченности) по значениям потенциала или его производных *предложен процесс последовательных приближений* области в виде решений последовательности линейных интегральных уравнений первого рода с неотрицательными, симметричными, вполне непрерывными операторами. На основании проведенного спектрального анализа операторов и изучения структуры области их определения и области определения нормальных решений *доказаны локальные теоремы существования и устойчивости* решений задачи определения звездных областей, близких к заданному классу. Показано, что на компактных множествах в банаховых пространствах данных и решений задача поставлена корректно. *Впервые* исследован *функционал типа невязки* для рассматриваемого класса уравнений с симметричным оператором. *Впервые* построены и адекватные стабилизаторы для этих уравнений при помощи таких дифференциальных операторов, собственные функции которых совпадают собственными функциями исходных интегральных операторов. Поэтому предложенные стабилизаторы четко вычленяют *множества корректности* данных уравнений, на которых однозначно и устойчиво вычисляются их решения. В арсенал *новых достижений* относится также построение методом регуляризации *адаптивных процедур сглаживания* данных наблюдений, позволяющих элиминировать большие погрешности, в общей конструкции не только локально регуляризующего оператора для каждого уравнения упомянутой последовательности, но и глобального регуляризующего оператора в виде последовательности локальных.

Достоверность и обоснованность полученных результатов в рамках той или иной из

рассматриваемых проблем определяется детальной логико-аналитической проработкой обсуждаемого круга вопросов, начиная с формулировки задачи, вывода соответствующего ей функционального уравнения, выяснения условий существования, единственности и устойчивости его решения и заканчивая построением устойчивых вычислительных схем получения каркаса приближенных решений, приспособленных для различных условий задания на дискретных множествах оператора соответствующего уравнения и его правой части. Основные результаты сформулированы в виде доказанных лемм, теорем и следствий. Их справедливость проверена в вычислительных экспериментах на ЭВМ при решении тестовых задач и освещена в печати [6-29].

Практическая значимость проведенных исследований определяется в первую очередь их направленностью на решение важных проблем прикладного характера как в геодезической гравиметрии для уточнения фигуры Земли, так и в грави- и магниторазведки для повышения эффективности интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. В аспекте прикладной ценности следует также отметить разработки регуляризующих алгоритмов и в составлении реализующих алгоритмы на ЭВМ программ для вычисления по заданному полю звездных ограниченных и неограниченных областей с конструктивным выделением компактных множеств допустимых решений.

По результатам тематических исследований защищена О. А. Черной кандидатская диссертация «Исследование обратных задач теории логарифмического потенциала для тел, близких к заданным» (1999 г.), а работы Якимчика А. И. «Граничная задача восстановления потенциала по значениям модуля его градиента» и Дубовенко Ю. И. «Определение контактной границы по значениям производных логарифмического потенциала на существенно ограниченных множествах» подготовлены к защите в качестве кандидатских диссертаций.

1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО ЗНАЧЕНИЯМ МОДУЛЯ ЕГО ГРАДИЕНТА

Для решения важных теоретических и прикладных задач наук о Земле, возникающих при изучении ее фигуры, внутреннего ее строения, глубинных геодинамических процессов и т. п., а также задач, связанных с движением искусственных аппаратов в околоземном пространстве требуется знать распределение значений потенциала силы тяжести, значений градиента этого потенциала или же значений модуля этого градиента. Такое распределение можно получить на основании фундаментальных свойств функций, описывающих гравитационное взаимодействие, и данных измерений. Свойства потенциала и его производных хорошо изучены и создана общая теория для восстановления потенциала в глобальной области по следам потенциала или следам его производных на границе области. К сожалению, мы не располагаем точными граничными данными для реализации классической схемы восстановления в глобальной области потенциала в виде решения одной из граничных задач Дирихле, Неймана или смешанной для уравнения Лапласа. В самом деле, до сей поры не найдено способа измерения гравитационного (или магнитного) потенциала, а измерения его производных на поверхности Земли слишком дорого стоят. В то же время накоплены в больших объемах данные гравиметрических и аэромагнитных наблюдений, представляющие собой значения модуля градиента соответствующего потенциала. Поэтому в классических задачах эти данные могут быть использованы лишь в качестве приближенных граничных условий, что обеспечивает в конечном счете определение потенциала с гарантированной точностью только в локальной области достаточно малой меры. Попытки восстановления потенциала в глобальной области на этом пути обречены на неудачу. Связано это с тем, что решения соответствующих граничных задач определяются в каждой малой области с точностью до некоторой неопределенной постоянной, зависящей непосредственно от размеров и формы малой области. Поэтому для «склеивания» локальных решений отсутствуют какие-либо разумные критерии.

1.1. История проблемы. Задача восстановления потенциала в глобальной области по тем или иным граничным данным возникла в связи с определением фигуры Земли и на протяжении длительного времени волновала умы выдающихся математиков. Первой в этом направлении была сформулирована смешанная граничная задача для уравнения Лапласа. Уже со времен И. Ньютона (1687г.) стало ясно, что притяжение Земли зависит от ее общей формы. Эта зависимость конкретизировалась в трудах А. Клеро (1743г.) по фигурам равновесия в виде сфероидов, которые и поныне составляют фундамент геодезической гравиметрии [30, 31] . По прошествии более ста лет проблемой заинтересовался Дж. Стокс [32] и нашел на основании решения определенной граничной задачи потенциала не только сжатие сфероида А. Клеро, но и определил локальные уклонения эквипотенциальной поверхности от базисного сфероида, которому соответствует нормальная сила тяжести. По-видимому, Дж. Стоксу принадлежит и вывод граничного условия задачи. Поэтому естественно называть ее задачей Стокса для уравнения Лапласа. Работа Дж. Стокса, несмотря на крупное достижение, оставалась не замеченной. Иначе как объяснить, что ее результаты повторены спустя много лет Г. Брунсом (в 1878г.) и крупнейшим математиком конца прошлого и начала текущего столетий А. Пуанкаре (в 1901г.) [33] .Проблему изучали также К. Гаусс и Ф. Бессель. В результате была сформулирована окончательно и для определенного класса областей решена третья или смешанная граничная задача для уравнения Лапласа. Следует тут же заметить, что при выводе граничного условия этой проблемы, как задачи геодезической гравиметрии, игнорировалось несовпадение измеренных на земном рельефе значений силы тяжести с теми, которые применялись в качестве граничных. На это несовпадение обратил внимание еще А. Пуанкаре, однако, из-за сложности вовсе не учитывал в своих рассуждениях. Начиная с 1945г. М. С. Молоденский опубликовал цикл работ [34, 35], в которых глубоко проанализировал классическую постановку граничной задачи и переистолковал ее в новом свете, что способствовало преодолению принципиальных затруднений стоксовой теории. В рамках данного истолкования в отличие от классических требований граничное условие задачи задавалось не «на уровне моря», а непосредственно на физической поверхности Земли. Однако, условие М.С. Молоденского оказалось также приближенным соотношением. Оно хотя и было хорошо приспособлено для вычисления потенциала в локальной области, но не гарантировало точность его определения в глобальной области.

Второй подход в задаче восстановления потенциала указал К. Юнг [36]. Рассматривая аномалии силы тяжести с точки зрения прикладной геофизики, т.е., аномалии, закартированные на небольших участках земной поверхности и обусловленные неглубоко расположенными

источниками, он рекомендовал считать их в первом приближении значениями «вертикальной» составляющей притяжения возмущающего тела. Другими словами, он предлагал заменить граничные данные в виде значений модуля градиента потенциала значениями гармонической функции. И хотя при этом специально не оговаривалось, что погрешность от такой подмены будет расти вместе с размерами области, где сосредоточены аномалиеобразующие объекты, такое толкование гравитационных (и магнитных) аномалий в эпоху становления геофизических методов поиска и разведки полезных ископаемых открыло широчайшие возможности в разработке теории интерпретации данных наблюдений. Эти возможности связывались с досконально развитой к тому времени теорией гармонических и аналитических функций. И с тех пор граничные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа заняли центральное место в разработке теории прямых и обратных задач грави- и магниторазведки. В рамках этих представлений сразу же появились основополагающие результаты. Среди них работы Б. В. Нумерова по «контактной поверхности» [37], П. С. Новикова по однозначному определению формы источника аномалии в классе финитных звездных тел [38], Л. Н. Сретенского по определению границы возмущающего тела, близкого к шару [39], работы А. А. Заморева [40-42], А. Н. Тихонова [43], Б. А. Андреева [41], И. М. Рапопорта [45] и др. В этих работах были поставлены, частично решены, а иногда только обозначены главнейшие проблемы теории интерпретации данных геофизических измерений, среди которых выделялись проблемы фильтрации и разделения суммарных полей на составляющие, обнаружения и локализации источников полей, разрешимости обратных задач потенциала, сформированных в виде соответствующих линейных или нелинейных уравнений. Поднятые А. А. Заморевым [40] проблемы обнаружения, разделения и локализации потенциальных полей развивались впоследствии многими исследователями [46, 47], среди которых М. Г. Сербуленко [48], В. Н. Страхов [49], М. А. Алексидзе и К. М. Картвелишвили [50], К. И. Соколовский [51], А. В. Черный и В. С. Гольцев [52] получили самые заметные результаты. С конца 50-х годов интенсивно изучались проблемы разрешимости обратных задач потенциала [53-55] и вскоре видные математики современности М. М. Лаврентьев [56, 57], В. К. Иванов [58] и А. Н. Тихонов [59] создали теорию решения условно-корректных задач методами регуляризации. В рамках этой теории крупных успехов достигли А. И. Прилепко [60], В. Н. Страхов [49, 61-63], А. В. Цирульский [64, 65], В. Г. Чередниченко [66] и А. В. Черный [67] в исследовании проблем существования, единственности и устойчивости решений обратных задач. Триумф теории увенчался широчайшим ее использованием в практике интерпретации геофизических данных, где успехи в разработке численных методов и алгоритмов решения задач сопутствовали В. Б. Гласко [68], В. И. Старостенко [69], С. М. Оганесяну [70], П. И. Балку [71], Е. Г. Булаху [72], Г. Я. Голиздре [73], А. И. Кобрунову [74], И. Н. Корчагину [75] и др.

Увлечение современной теорией, построенной, главным образом, на базе линейных граничных задач потенциала, гармонических и аналитических функций с привлечением идей и методов функционального анализа и математического программирования, вычислительной математики, теории вероятностей и математической статистики, было настолько сильным, что в крупном исследовании М. А. Алексидзе задачи редуцирования значений силы тяжести [76] осталось практически без внимания одно чрезвычайной важности замечание. Оно состояло в том, что аномалии силы тяжести. воспринимавшиеся всеми с выходом работы К. Юнга [36] как гармонические функции, таковыми по существу не являются. Поэтому аппроксимации с гарантированной точностью аномалий гармоническими функциями могут быть выполнены только в локальных, а не в глобальных областях. Отсюда между прочим уже следовало, что идеи и методы созданных теорий, несмотря на их привлекательное разнообразие и общность, дают возможность эффективно и с высокой точностью решать по заданным аномалиям ту или иную прикладную задачу исключительно в рамках областей достаточно малой меры. Исходя из этого принципа М. А. Алексидзе предложил оригинальный подход к решению проблемы приближенного редуцирования силы тяжести в виде решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в специально построенной локальной области с приближенными граничными данными. Тем самым был указан один из возможных, хотя и не лучший, способ использования методов и алгоритмов разработанной теории при решении прикладных задач по гравиметрическим и аэромагнитным измерениям. Однако он не был воспринят широкой аудиторией геофизиков. Методы и алгоритмы грави- и магниторазведки, ориентированные, в основном, на истолкование слабо интенсивных аномалий на небольших участках земной поверхности, связанных с неглубоко залегающими источниками, стали широко применяться с конца 50-х годов текущего столетия для изучения глубинных слоев и неоднородностей коры и

мантии Земли. Вошли в моду, особенно в последнее время, построения различных глубинных разрезов по гравитационным, аэромагнитным и др. данным, значение которых не осознано еще до конца. Думается, что необоснованное перенесение постулатов теории из области гравиразведки в область изучения коры и мантии Земли, когда по аномалиям силы тяжести «обнаруживают» всякого рода неоднородности, расположенные на глубинах вплоть до 600 км, не только бесполезно, но и вредно. Вредно потому, что вводит в заблуждение огромную аудиторию исследователей недр Земли, которые принимают на веру любые геофизические построения. Бесполезно потому, что добытые «сведения» методами теории линейных граничных задач потенциала из данных замеров модуля градиента потенциала могут значительно уклоняться от истинной структуры. Уклонение будет тем значительнее, чем больше размеры изучаемой области. Не исправит положение использование различного рода редукций типа так называемых «норм», поскольку для объединения даже пересекающихся между собой локальных областей отсутствуют какие-либо разумные критерии. В связи с этим представляются бессмысленными горячие дискуссии, нередко разгорающиеся вокруг тех или иных моделей глубинного строения какого-нибудь региона, выполненных специалистами различных школ и группировок. И тем не менее состояние дел не меняется. Кризисная ситуация, сложившаяся в результате несоответствия возможностей линейной аппроксимации аномалий, до сей поры не осознана не только интерпретаторами, но и теоретиками, которые вопреки исследованиям М. А. Алексидзе упорно не желают видеть «белые пятна» в проблемах использования аксиом и методов теории линейных граничных задач потенциала для истолкования аномалий модуля градиента потенциала.

Нелинейная граничная задача определения потенциала по значениям модуля его градиента, позитивное решение которой сняло бы все накопившиеся проблемы и затруднения, и поныне не занимает подобающего ей места среди насущных проблем современной теории интерпретации геофизических измерений. Как отмечалось, впервые ее обнаружил М. А. Алексидзе и дал приближенное ее решение. В его исследовании [76] задача формулировалась для точного уравнения в виде уравнения Лапласа и приближенных граничных данных в виде измеренных значений силы тяжести на ограниченном участке земного рельефа, составляющем одну из частей границы локальной области, для которой ставилась задача, и «угаданных» значений силы тяжести на других ограничивающих область гранях. Несколько лет спустя А. В. Черный предложил два других способа решения проблемы [67, 77-83]. Отправным пунктом одного из них избран вывод линейного дифференциального уравнения [78], которому удовлетворяют в глобальной области значения модуля градиента потенциала и которое оказалось уравнением типа уравнения Клейна-Гордона с переменным коэффициентом, характеризующим кривизну поля. Для этого уравнения рассмотрены способы определения его фундаментального решения [77-79], с помощью которого построены обобщенные потенциалы объемных масс, простого и двойного слоев. Интегральное представление потенциала двойного слоя использовано для решения граничной задачи типа задачи Дирихле для уравнения силы тяжести в глобальной области с данными на поверхности Ляпунова [67, 80]. К сожалению, предложенный способ оказался также приближенным вследствие того, что граничная задача изначально ставилась для приближенного уравнения и точных граничных данных. Дело в том, что переменный коэффициент уравнения силы тяжести, для которого построена теория, известен только своими первыми приближениями, характеризующими кривизны (нормальных) полей заданной конфигурации, в том числе полей с эквипотенциальными поверхностями в виде семейств концентрических сфер или конфокальных эллипсоидов. Эти приближения хотя и позволяют описать аномалии силы тяжести Земли с точностью более высокой, чем в классической схеме [81, 82], однако не дают возможности вычислять в глобальной области необходимые преобразования аномалий с любой наперед заданной точностью. Для преодоления этих затруднений был создан еще в работе [77] метод последовательного уточнения коэффициента уравнения, который впоследствии был развит как точный метод последовательного восстановления потенциала притяжения по значениям модуля его градиента при условии, что восстанавливаемый потенциал не слишком уклоняется от заданного. Этот второй способ решения проблемы конспективно изложен в работах [67, 77, 83] и пополняется в данном исследовании. Следующий шаг в изучении проблемы после предложений [77-81] сделал М. А. Алексидзе [50, 84], сформулировав окончательно внешнюю нелинейную задачу для уравнения Лапласа с граничными данными в виде модуля градиента потенциала и на примерах проиллюстрировав, что в общем случае она не имеет единственного решения. В свою очередь А. В. Черный нашел впоследствии [67], что задача Алексидзе для уравнения Лапласа корректна на множествах истокообразно представимых

функций в виде потенциалов простого слоя, распространенных на выпуклых поверхностях Ляпунова.

1.2. Характеризация силы тяжести. Введение в теорию модуля градиента потенциала силы тяжести начнем с описания ее предметной модели и связанных с нею понятий. В качестве предметной выберем простейшую модель Земли в виде абсолютно твердого тела, близкого по форме к телу вращения, движущегося равномерно по своей орбите и вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью (без прецессии и нутации). Обозначим через G^- ограниченную область точек трехмерного евклидова пространства $R^{(3)}$, занятую массами Земли (за исключением масс ее неподвижной газовой оболочки), через G^+— неограниченное дополнение этой области, свободное от каких бы то ни было гравитирующих объектов, а через ∂G— границу между многообразиями G^- и G^+, отождествляемую с физической поверхностью Земли, так что $G^+ = R^{(3)} \setminus \overline{G^-}, \overline{G^-} = G^- \bigcup \partial G$. Меры каждого из подмножеств любой из областей G^-и G^+ (т.е. длины, углы, площади, объемы) в соответствии с принятой моделью Земли остаются все время неизменными. Поэтому в последующих рассмотрениях не принимаются во внимание никакие динамические эффекты, связанные со сравнительно медленными или быстрыми, периодическими или апериодическими относительными перемещениями отдельных крупных или незначительных участков Земли, которые могут быть обусловлены то ли внутренними процессами, протекающими в недрах Земли, то ли процессами, имеющими место на ее поверхности, то ли ее движением в космическом пространстве.

Введем прямоугольную декартовую систему координат $0X_1X_2X_3$ с началом в центре Земли, оси $0X_1$ и $0X_2$ расположим произвольно в экваториальной ее плоскости, а ось $0X_3$ направим по оси ее вращения. Точки пространства $R^{(3)}$ будем записывать малыми буквами, а их координаты - теми же буквами с индексами, причем для различия точек области G^- и ее дополнения G^+ первые будем обозначать греческими, а вторые - латинскими, т.е. $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi \in G^-$, $(x_1,x_2,x_3) = x \in G^+$. Элемент объема $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ в этой системе обозначений записывается в виде $d\xi$, а евклидово расстояние между точками x и ξ - в виде $|x-\xi| = \left(\sum_{i-1}^{3} (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Иногда векторные функции будем обозначать жирными буквами, а их модули (и скаляры) - светлыми.

Потенциал силы тяжести Земли при условии, что массы $M(\xi)$ обладают плотностью $\sigma(\xi)$, $\xi \in G^-$, можно записать, как известно, в виде

$$W(x) = f \int_{G^-} \frac{\sigma(\xi) d\xi}{|x-\xi|} + \Omega(x),\ x \in R^{(3)}, \tag{1.1}$$

где

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), & x \in G^-, \\ 0, & x \in G^+, - \end{cases}$$

потенциал центробежной силы, $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} c^{-1}$— модуль вектора угловой скорости Земли, $f = (6672 \pm 4.1) \cdot 10^{-14} м^3 кг^{-1} с^{-2}$— гравитационная постоянная.

Известно, что потенциал силы тяжести $W(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(R^{(3)})$ непрерывных функций вместе со своими производными до второго порядка включительно, если плотность гравитирующих масс принадлежит классу $C^{(1)}(G^-)$. Впрочем, для того чтобы

$W(x) \in C^{(2)}(R^{(3)})$ вовсе не обязательно предположение, что $\sigma(x) \in C^{(1)}(G^-)$. Функция $\sigma(x)$ и ее частные производные первого порядка могут претерпевать разрывы (первого рода) на конечном множестве кривых линий или даже поверхностей в G^-. Важным при этом является наличие у функции $\sigma(x)$ первых обобщенных производных. Однако для простоты рассмотрений ограничимся сейчас предположением, что плотность земных образований описывается функциями класса $C^{(1)}(G^-)$ и это требование не будем считать обременительным в связи с тем, что и при более естественных предположениях о свойствах плотности можно в рамках теории обобщенных функций получить обоснование тех же результатов. Попутно заметим, что зависимость дифференциальных свойств «внешнего» потенциала $W(x)$, $x \in G^+$, от плотности $\sigma(x)$, $x \in G^-$, более слабая, а именно, для бесконечной дифференцируемости внешнего потенциала достаточно, чтобы плотность была интегрируемой в области G^- функцией.

Для описанной ситуации напряженность гравитационного поля определяется вектором

$$\mathbf{g}(x) = -\nabla W(x) = -\left\{\frac{\partial W(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial W(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial W(x)}{\partial x_3}\right\},$$

ортогональным эквипотенциальной поверхности $\partial W_x : W(y) = c_x = const.$, проходящей через точку $x \in R^{(3)}$. Направление

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\mathbf{g}(x)}{g(x)} = \left(\cos(n, x_1), \cos(n, x_2), \cos(n, x_3)\right)$$

выбирается в качестве внутренней нормали к поверхности ∂W_x, а величина напряженности $g(x)$, т.е. значение модуля градиента потенциала, задается в виде

$$g(x) = |\mathbf{g}(x)| = (\mathbf{g}(x), \mathbf{n}(x)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(x)}{\partial n},$$

(1.2)

$$\frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k) = \frac{\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}}{\left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

где $(\mathbf{g}(x), \mathbf{n}(x))$ - скалярное произведение векторов $\mathbf{g}(x)$ и $\mathbf{n}(x)$ в $R^{(3)}$. Из представления (1.1) с принятыми ограничениями на плотность следуют фундаментальные соотношения

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_k^2} = \Delta W(x) = \begin{cases} -4\pi f \sigma(x) + 2\omega^2, & x \in G^-, \\ 0, & x \in G^+, \end{cases}$$

(1.3)

которые служат для однозначного определения потенциала (или его производных) в пространстве $R^{(3)}$ при наличии определенных граничных условий на поверхности ∂G гравитирующей области G. Для замыкания области определения дифференциального оператора (Пуассона или Лапласа соответственно) указывается его след на границе области в виде операторного уравнения

$$B(W) = \alpha(x)\, W(x) + \beta(x) \frac{\partial W(x)}{\partial l} = \varphi(x), \quad x \in \partial G,$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x)$ — любое, отличное от касательного, направление в точке x границы ∂G, $\varphi(x)$ — заданная функция. В зависимости от конкретного вида граничного оператора $B(W)$ различают три основных типа классических (линейных) граничных задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) (1.3). При $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = 0$ задача называется *задачей Дирихле*, при $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$, $\mathbf{l} = \mathbf{m}(x)$, где $\mathbf{m}(x)$ - нормаль к поверхности ∂G — *задачей Неймана,* а при $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не равных нулю одновременно — задачей Пуанкаре (или *задачей о наклонной производной,*

а при $\mathbf{l} = \mathbf{m}(x)$ — *смешанной*). Если же $\beta(x) = 1$, $\alpha(x) = \gamma^{-1}(x)\dfrac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu}$, где $\gamma(x) = \left|-\nabla U(x)\right|$ — нормальное значение силы тяжести, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(x)$ - внутренняя нормаль к поверхности $\partial U_x : U(y) = C_x$ сфероида, проходящего через точку x и определяемого заданным нормальным потенциалом $U(x)$, то граничный оператор

$$B(T) = \frac{\partial\gamma(x)}{\partial\nu}\frac{T(x)}{\gamma(x)} + \frac{\partial T(x)}{\partial\nu} = \varphi(x), \quad x \in \partial G,$$

примет вид граничного условия *задачи Стокса-Молоденского* для уравнения Лапласа определения в G^+ возмущающего потенциала $T(x) = W(x) - U(x)$. Так или иначе, точные граничные условия в классических задачах восстановления потенциала формируются по следам потенциала или его производных. Но измерения потенциала или вектора-напряженности силы тяжести на физической поверхности Земли связаны с чрезвычайно большими техническими и экономическими трудностями, которые вряд ли можно будет преодолеть и в обозримом будущем. В то же время широко доступными являются сегодня гравиметрические данные. Однако при помощи гравиметров измеряются только приращения модуля градиента потенциала силы тяжести, а не значения какой-то определенной составляющей градиента потенциала, как это часто предполагается. В самом деле, при измерениях гравиметры устанавливаются в каждой точке x земной поверхности ∂G по уровню на эквипотенциальной поверхности $W(y) = C_x$, пересекающей ∂G в этой точке. При этом пространственная ориентация гравиметров никак не фиксируется и в результате остаются неизвестными наклоны приборов при их перемещении от пункта x к пункту y на ∂G. Наклоны приборов, обусловленные различной кривизной каждой из эквипотенциальных поверхностей $W(z) = C_x$ и $W(z) = C_y$, $C_x \neq C_y$, проходящих через указанные пункты и в общем случае непараллельных друг другу, могли бы быть охарактеризованы, скажем, приращением угла между нормалями $\mathbf{m}(x)$ и $\mathbf{n}(x)$ пересекающихся в точке x поверхностей ∂G и ∂W_x соответственно, или же непосредственными измерениями значений $\cos(n, x_k)$, $k = 1,2,3$. Но ни эти, ни какие бы то ни было аналогичные величины, определяющие направление силы тяжести, не измеряются в точках земного рельефа в виду исключительной сложности таких наблюдений. Поэтому в результате наблюдений с гравиметрами получаются одни лишь приращения абсолютных значений ускорения силы тяжести, соответствующие приращению модуля вектора $\mathbf{g}(x)$ между поверхностями ∂W_x и ∂W_y в точках x и y земного рельефа соответственно. Сами же значения модуля градиента потенциала не являются значениями гармонической функции. Это вытекает из представления (1.2) и зиждется на следующем утверждении.

Лемма. *Произведение двух функций* $u(x)$ *и* $v(x)$, $x \in D$, *класса* $C^{(2)}(D)$ *будет гармонической в области* D *функцией* $w(x) = u(x)v(x)$, *если каждая из этих функций гармоническая и их градиенты* $\nabla u(x)$ *и* $\nabla v(x)$ *ортогональны друг другу в* D.

Доказательство получаем немедленно из равенства

$$\nabla^2 w(x) \equiv \Delta w(x) = v(x)\nabla^2 u(x) + 2\left\langle\nabla u(x), \nabla v(x)\right\rangle + u(x)\nabla^2 v(x).$$

Следствие. *Модуль градиента потенциала (силы тяжести) не удовлетворяет уравнению Лапласа ни в одной точке области* G^+.

В самом деле, хотя каждая из составляющих градиента $u(x) = \dfrac{\partial W(x)}{\partial x_i}$ является гармонической в G^+ функцией, сомножители $v(x) = \cos(x_i, n)$, $i = 1,2,3$, заданные

выражениями (1.2), уравнению Лапласа не удовлетворяют. В этом легко убедиться при помощи непосредственных вычислений. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(x_j,n)=\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\cos(x_j,n)}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\cos(x_j,n)=\frac{1}{g}\frac{\partial^3 W}{\partial x_i^2\,\partial x_j}-\frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}+\frac{\cos(x_j,n)}{g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2-$$

$$-\frac{\cos(x_j,n)}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}-\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(x_j,n),$$

то с учетом соотношения (1.3) и очевидного равенства

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2(x_i,n)=1$$

получаем, что

$$\Delta\cos(x_j,n)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\cos(x_j,n)=-\frac{2}{g}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(x_j,n)+a^2(x)\cos(x_j,n),$$

где

$$a^2(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(x_j,n)\right]^2>0.$$

(1.4)

Отсюда и на основании леммы вместе с представлением (1.2) заключаем, что модуль градиента потенциала не является гармонической функцией.

Отметим в рамках принятой модели еще одно характеристическое свойство модуля градиента потенциала силы тяжести.

Теорема 1.1. *Если потенциал силы тяжести $W(x)$ порождается массами с плотностью $\sigma(x)$ класса $C^{(1)}(G^-)$, распределенными в области G^-, которая как абсолютно твердое тело, близкое к телу вращения, вращается вокруг своей оси $0x_3$ с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то модуль градиента потенциала во всем евклидовом пространстве $R^{(3)}$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению*

$$\Delta g(x)-a^2(x)\,g(x)=\begin{cases}-4\pi f\left|\nabla\sigma(x)\right|, & x\in G^-\\ 0, & x\in G^+.\end{cases}$$

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться известной формулой векторного анализа

$$\nabla(\mathbf{g},\mathbf{n})=(\mathbf{g},\nabla)\mathbf{n}+(\mathbf{n},\nabla)\mathbf{g}+[\mathbf{g},\nabla\times\mathbf{n}]+[\mathbf{n},\nabla\times\mathbf{g}],$$

где прямыми скобками $[\cdot,\cdot]$ обозначено векторное произведение соответствующих векторов, при дифференцировании представления $g(x)$ формулой (1.2).

Следствие. *Если плотность тяготеющих масс принадлежит классу $C^{(1)}(G^-)$ (или объединению $\bigcup_{i=1}^{n}C^{(1)}(G_i^-)$, $\bigcup_{i=1}^{n}G_i^-=G^-$), то при переходе из области G^- в область G^+ (или при пересечении других границ, разделяющих области G_i^-, на которых плотность $\sigma_i(x), i=1,2,\cdots,n$, земных образований изменяется скачком) не только вторые, но и первые производные модуля градиента потенциала силы тяжести претерпевают разрывы*

непрерывности, в то время как сами значения модуля остаются непрерывными, а их особые точки на границах имеют вид «угловых», «возврата», «самопересечения» и т. п.

Доказательство вытекает из фундаментального соотношения (1.3) и других известных свойств потенциала и его производных [85].

Приведем геометрическую интерпретацию функции $a^2(x)$ в дифференциальном соотношении теоремы 1, которая задается равенством (1.4). Для этого рассмотрим на эквипотенциальной поверхности две близко расположенные точки x и $x+\Delta x$. Предположим, что эти точки не являются особыми для поверхности, т.е., что хотя бы одна из производных $\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$, в этих точках отлична от нуля. Тогда в них можно восстановить единичные внутренние нормали $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{n}(x+\Delta x)$ и провести через их основания касательные плоскости к выбранной поверхности. Взаимное расположение касательных плоскостей будем характеризовать величиной двугранного угла $\Delta\varphi$ и положением прямой их пересечения. Очевидно эта прямая в пределе будет ортогональной к вектору $d\mathbf{n}(x)$. Сосредотачивая внимание на параметре $\Delta\varphi$, отметим, что он равен углу между нормалями $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{n}(x+\Delta x)$, причем $d\varphi = |d\mathbf{n}(x)|$. В свою очередь

$$d\mathbf{n}(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{n}(x)}{\partial x_i} dx_i$$

или

$$d\mathbf{n}(x) = \left(Grad\,\mathbf{n}(x)\right)^{*} d\mathbf{x} \qquad (1.5)$$

где

$$d\mathbf{n}(x) = \left(dn_1(x), dn_2(x), dn_3(x)\right)^{*}, \quad d\mathbf{x} = \left(dx_1, dx_2, dx_3\right)^{*},$$

$$\left(Grad\,\mathbf{n}(x)\right)^{*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\cos(x_1,n)}{\partial x_1} & \frac{\partial\cos(x_1,n)}{\partial x_2} & \frac{\partial\cos(x_1,n)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\cos(x_2,n)}{\partial x_1} & \frac{\partial\cos(x_2,n)}{\partial x_2} & \frac{\partial\cos(x_2,n)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\cos(x_3,n)}{\partial x_1} & \frac{\partial\cos(x_3,n)}{\partial x_2} & \frac{\partial\cos(x_3,n)}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

Тензор

$$\frac{d\,\mathbf{n}(x)}{d\mathbf{x}} = \left(Grad\,\mathbf{x}(x)\right)^{*},$$

который обычно называют производной вектора (единичной нормали) $\mathbf{n}(x)$ по вектору-смещению $d\mathbf{x}$, характеризует собой скорость вращения единичного вектора $\mathbf{n}(x)$ при его перемещении по поверхности ∂W_x в бесконечно близкую точку подобно тому, как обычная производная функции одного аргумента определяет скорость изменения функции с ростом аргумента. Отсюда, учитывая связь угла $\Delta\varphi$ с приращением $\Delta\,\mathbf{n}(x)$, находим, что

$$\frac{d\varphi(x)}{d\mathbf{x}} = \frac{|d\,\mathbf{n}(x)|}{d\mathbf{x}} = \left\|Grad\,\mathbf{n}(x)\right\|_c = a(x),$$

поскольку евклидовы нормы матриц тензоров $\left(Grad\,\mathbf{n}(x)\right)^{*}$ и $Grad\,\mathbf{n}(x)$ тождественно равны друг другу. Таким образом, функция $a^2(x)$ описывает квадрат скорости вращения единичного вектора нормали $\mathbf{n}(x)$ к эквипотенциальной поверхности $W(y)=C_x$ и характеризует собой кривизну линий на этой поверхности. Действительно, поскольку обе точки x и $x+\Delta x$ принадлежат одной и той же поверхности, то из трех компонент вектора $d\mathbf{x}$ только две являются линейно независимыми. Это следует из теоремы о существовании неявной функции, в согласии

с которой, если, например, $\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_3} \neq 0$, то

$$dx_3(x) = \frac{\partial x_3(x)}{\partial x_1} d\,x_1 + \frac{\partial x_3(x)}{\partial x_2} d\,x_2$$

и, следовательно, смещение $d\,\mathbf{n}(x)$ осуществляется вдоль определенной кривой на поверхности $W(y) = C_x$. Можно показать, что квадрат угла между касательными плоскостями, оцениваемый величиной $\left|d\,\mathbf{n}(x)\right|^2$, может быть выражен через гауссову и среднюю кривизны, а также через первую и вторую квадратичные формы поверхности. В связи с этим функцию $a^2(x)$ можно считать одной из фундаментальных геометрических характеристик самой поверхности $W(y) = C_x$, проходящей через фиксированную точку x евклидова пространства $R^{(3)}$, а для всех точек $x \in R^{(3)}$, т.е. для семейства эквипотенциальных поверхностей, заполняющих все пространство, она определят целиком и полностью характер потенциального поля. Если бы функция $a^2(x)$, $x \in R^{(3)}$, была бы известна, то соотношение теоремы 1.1 можно было бы принять в качестве линейного дифференциального уравнения силы тяжести и для этого уравнения с граничными данными в виде значений силы тяжести $g(x),\ x \in \partial D$, поставить и решить задачу Дирихле для любой замкнутой области $\overline{D} = D \bigcup \partial D$. Тем самым был бы получен необходимый аппарат для преобразований значений модуля градиента потенциала, возникающих в прикладных задачах теории фигуры Земли и теории истолкования аномалий силы тяжести (или аэромагнитных измерений). Однако мы располагаем только ограниченной информацией об этой функции, что сразу же существенно сужает возможности данного способа преобразований $g(x)$. В арсенал информации об $a^2(x)$ отнесем прежде всего сведения физического характера. Известно, что относительные изменения силы тяжести на земной поверхности почти не превосходят 0.006 доли от максимального значения модуля ускорения силы тяжести (что составляет примерно 5000-6000 мгл.). Это свидетельствует не только о том, что Земля мало уклоняется от шара, но также и о том, что расположение масс внутри Земли обладает почти сферической симметрией. В связи с этим непосредственно из представления (1.4) и известных оценок для потенциала силы тяжести, его первых и вторых производных в окрестности бесконечно удаленной точки, которые суть

$$\left|W(x)\right| = o\left(|x|^{-1}\right), \quad \left|\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right| = o\left(|x|^{-2}\right), \quad \left|\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| = o\left(|x|^{-3}\right), \quad i, j = 1,2,3,$$

вытекает, что для функции $a^2(x)$ при $x \to \infty$ имеет место оценка

$$a^2(x) = o\left(|x|^{-2}\right) \tag{1.6}$$

Для того чтобы уточнить эту оценку в окрестности области G^-, занятой массами Земли, примем в качестве *нулевого* $a_0^2(x)$ и *первого* $a_1^2(x)$ *приближений* к функции $a^2(x)$ такие приближения, которые описывают *кривизны семейств* эквипотенциальных поверхностей соответственно в виде *концентрических сфер* и *конфокальных сжатых эллипсоидов вращения* (сжатых сфероидов). Для семейства концентрических сфер радиуса r с базисом

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad r_0 < r$$

внутренняя нормаль $\boldsymbol{\nu}(x; r_x)$ в точке $x \in R^{(3)}$ к сфере радиуса r_x определяется, очевидно, выражением

$$\boldsymbol{\nu}(x; r_x) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

поэтому

$$a_0^2(x) = \begin{cases} 2|x|^{-2}, & |x| > r_0, \\ 2\,r_0^{-2}, & |x| \le r_0, \end{cases}$$

Для семейства сжатых конфокальных эллипсоидов вращения, малые оси которых совпадают с осью (вращения) $0x_3$, базис задается эллипсоидом

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{b^2}=1,\ l^2=a^2-b^2>0,$$

а индивидуализация сфероидов семейства производится с помощью параметров $a_\xi=a(\xi)>a$ и $b_\xi=b(\xi)>b$ точки $\xi\in R^{(3)}$, через которую проходит данный сфероид. При этом параметры сфероида и его внутренняя нормаль $\mathbf{v}(x;\ a_\xi,b_\xi)$ определяются в виде

$$a_\xi^2=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+l^2+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2-l^2\right)^2-4l^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\right\},$$

$$b_\xi^2=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2-l^2+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+l^2\right)^2-4l^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)}\right\},$$

$$\mathbf{v}\left(x;a_\xi,b_\xi\right)=\frac{\left(b_\xi^2x_1,\,b_\xi^2x_2,\,a_\xi^2x_3\right)}{\sqrt{b_\xi^4\left(x_1^2+x_2^2\right)+a_\xi^4x_3^2}},$$

а соответствующая семейству функция $a_1^2(x)$ задается выражением

$$a_1^2(x)=\begin{cases}\dfrac{b_\xi^4}{b_\xi^4\left(x_1^2+x_2^2\right)+a_\xi^4x_3^2}\left[1+\dfrac{a_\xi^4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{b_\xi^4\left(x_1^2+x_2^2\right)+a_\xi^4x_3^2}\right], & a_\xi>a,b_\xi>b,\\[2ex] \dfrac{b^4}{b^4\left(x_1^2+x_2^2\right)+a^4x_3^2}\left[1+\dfrac{a^4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{b^4\left(x_1^2+x_2^2\right)+a^4x_3^2}\right], & a_\xi\le a,b_\xi\le b.\end{cases}$$

Интересно сопоставить между собой приближения $a_0^2(x)$ и $a_1^2(x)$. В силу конечности величины $l^2=a^2-b^2$ ясно, что

$$\lim_{|x|\to\infty}\left|a_0^2(x)-a_1^2(x)\right|=0,$$

откуда с учетом оценки (1.6) следует, что при стремлении к бесконечно удаленной точке не только выписанные, но и все последующие в совокупности возможные приближения функции $a^2(x)$, так же, как и сама функция становятся неотличимыми от $a_0^2(x)$.

Обратим, наконец, внимание на то, что *приближения* $a_0^2(x)$ и $a_1^2(x)$ вместе с оценкой (1.6) *не зависят от величины напряженности поля* и связаны только с геометрией его эквипотенциальных поверхностей. Это дает основание для индуктивного предположения, что все возможные приближения вместе с предельной функцией $a^2(x)$ не зависят от $g(x)$, чем обосновываются принятые ранее названия для дифференциальных соотношений с коэффициентами $a_k^2(x),\ k=0,1,\cdots$. О практическом использовании этих уравнений речь шла в заметках [78-82].

В заключение этого пункта концентрируем внимание на том, что на основании данных $g(x),\ x\in\partial G$, *нельзя сконструировать точные граничные данные ни для одной из линейных классических задач теории потенциала,* в том числе и для задач Стокса-Молоденского для уравнения Лапласа или Дирихле для уравнения силы тяжести. В первом случае для точного уравнения в глобальной области можно сформулировать лишь приближенные граничные условия, во втором — составить только приближенное линейное уравнение (с приближениями $a_0^2(x)$ и

$a_1^2(x)$ его коэффициента) для точных граничных данных. В обоих случаях нельзя получить в глобальной области решения задачи с высокой точностью и поэтому поиск его выдвигается в разряд первоочередных проблем теории.

1.3. Оценка уклонения решений задачи Дирихле для уравнения аномалий силы тяжести и для уравнения Лапласа. Рассмотрим как будут отличаться друг от друга функции $u(y)$ и $v(y)$ в некоторой окрестности $G(x)$ точки $x \in G^+$ в метрике пространства непрерывных функций $C(G(x))$, если они получены продолжением граничных значений аномалий силы тяжести $\tau(y)$, $y \in \partial G(x)$, в виде решений соответствующих задач Дирихле для уравнения аномалий силы тяжести

$$\Delta u(y) - a^2(y)u(y) = 0, y \in G(x) \bigcup G^+,$$
$$u(y) = \tau(y), \quad y \in \partial G(x), \tag{1.7}$$

и уравнения Лапласа

$$\Delta v(y) = 0, y \in G(x) \bigcup G^+,$$
$$v(y) = \tau(y), \quad y \in \partial G(x). \tag{1.8}$$

Здесь, как и в статье [81], под уравнением аномалий силы тяжести подразумевается линейное дифференциальное соотношение теоремы 1.1 с коэффициентом $a_1^2(x)$, а под аномалиями силы тяжести — разность

$$\tau(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial \nu(x)} = \frac{\partial W(x)}{\partial n(x)} \frac{\partial n(x)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial U(x)}{\partial \nu(x)},$$

представляющая собой нормальную производную возмущающего потенциала $T(x)$, отражающего отклонение реального потенциала силы тяжести $W(x)$ от нормального $U(x)$. В качестве *нормального принимается потенциал $U(x)$ некоторой области G_0^- достаточно простой геометрии, не слишком уклоняющейся от области G^- и вращающейся вместе с ней вокруг одной и той же оси с постоянной угловой скоростью, выполненной массами, равными массам в G^- и распределенными в G_0^- в отличие от распределения в G^- «правильно» в каком-то смысле.* Близость областей G_0^- и G^- характеризуется близостью их границ ∂G_0 и ∂G, которая в свою очередь определяется конкретной мерой уклонения поверхности ∂G_0 от земного рельефа ∂G. В данном случае ∂G_0 — сжатый сфероид $\nu(x)$ — внутренняя нормаль к сфероиду в точке x, правильное распределение масс в G_0^- — одна из известных плотностных моделей Земли [86]. Здесь же отметим, что данное определение аномалий отличается от классического прежде всего тем, что в классической схеме аномалии определяются *уклонениями* реального поля силы тяжести Земли от некоторого его *осреднения.* Последнее принимается в качестве определенной аппроксимации поля сфероида с *неизвестным распределением масс* внутри него. А отсутствие информации о распределении нормальных масс чрезвычайно затрудняет интерпретацию гравитационных аномалий. Придерживаясь принятой схемы, обозначим через $\vartheta(x)$ угол между нормалями $\mathbf{n}(x)$ и $\boldsymbol{\nu}(x)$ в точке x (который обычно называют уклонением отвеса). Тогда, очевидно, $\cos\vartheta(x) = (\mathbf{n}(x), \boldsymbol{\nu}(x))$ и аномалии

$$\tau(x) = g(x) - \gamma(x) - 2g(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2},$$

где $\gamma(x)$ - нормальное значение силы тяжести, отвечающее *известному распределению масс* внутри сфероида ∂G_0. Если нормальный сфероид и распределение в нем масс выбраны удачно, то можно ожидать, что уклонение отвеса (в районах со «спокойным» рельефом) не будет превышать 60’’, в связи с чем оценка сверху последнего слагаемого в определении аномалии едва ли будет больше величины

$$2g(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} < 0.05\,\text{мгл},\; x\in\partial G.$$

Поэтому аномалии будем считать заданными в виде разности

$$\tau(x) = g(x) - \gamma(x), \quad x\in\partial G$$

по начертанию совпадающей с классическим определением аномалии, но отличающейся от него существенно тем, что нормальные значения силы тяжести теперь тесно связываются с конкретным — *правильным* — распределением масс в G_0^-.

Выяснив необходимые характеристики граничных данных, скажем несколько слов о задаче (1.8), в которой для описания аномалий в локальной области $G(x)$ используется уравнение Лапласа. Непосредственно из сопоставления задач (1.7) и (1.8) видим, что они неразличимы при $a^2(y) = 0, \quad y\in G(x)$. А из определения (1.4) ясно, что равенство нулю коэффициента уравнения аномалии силы тяжести возможно только в такой идеальной ситуации, когда векторы единичных нормалей $\mathbf{n}(x)$, определяющие направление вектора напряженности поля, в произвольных точках x пространства $R^{(3)}$ параллельны между собой. В рамках принятой модели Земли некоторое приближение к такой идеализации имеем в областях достаточно малой меры, где в каждой из них направление «полного» вектора силы тяжести можно считать постоянным, а относительные флуктуации силы тяжести от среднего ее значения небольшими.

В круге принятых ограничений для решения поставленной вначале этого пункта задачи можно предложить два способа. Один из них состоит в том, что для отыскания отклонения $\varepsilon(y) = u(y) - v(y), \quad y\in G(x)$, друг от друга решений $u(y)$ и $v(y)$ задач (1.7) и (1.8) с одними и теми же граничными условиями можем, очевидно, сформулировать следующую граничную задачу

$$\Delta\varepsilon(y) = a^2(y)\,u(y), \quad y\in G(x),$$
$$\varepsilon(y) = 0, \quad y\in\partial G(x).$$

(1.9)

Другой способ, который зиждется на преобразовании (1.5), состоит в оценке разности

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\partial T(y)}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial T(y)}{\partial\nu(x)}$$

(1.10)

для фиксированной точки x и пробегающей область $G(x)$ точки y. Эта разность, очевидно, представляет собой отклонение в точке $y\in G(x)$ аномалии $\tau(y)$ от значения гармонической функции $\dfrac{\partial T(y)}{\partial\nu(x)}$ как «вертикальной» (по направлению $\boldsymbol{\nu}(x)$ к поверхности $\partial U_x : U(z) = C_x$ в точке x) составляющей возмущающего потенциала.

Реализуя первый способ, заменим задачу для уравнения Пуассона соответствующей граничной задачей для уравнения Лапласа. Это можно сделать на основании того, что задача Дирихле для уравнения Пуассона всегда имеет частное решение $\varepsilon_0(y)$ в виде потенциала объемных масс с плотностью, равной в данном случае $-a^2(y)u(y), \; y\in G(x)$, т.е., решение

$$\varepsilon_0(y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{G(x)}\frac{a^2(\eta)\,u(\eta)}{|y-\eta|}d\eta, \quad y\in\overline{G(x)}.$$

Теперь подстановкой $\varepsilon_1(y) = \varepsilon(y) - \varepsilon_0(y), \; y\in G(x)$, от задачи (1.9) перейдем к задаче

$$\Delta\varepsilon_1(y) = 0, \quad y\in G(x)$$

$$\varepsilon_1(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{G(x)}\frac{a^2(\eta)u(\eta)}{|y-\eta|}d\eta, \quad y\in\partial G(x).$$

Отсюда следует решение поставленной ранее задачи, так как функция $\varepsilon_1(y)$ в области $G(x)$ гармоническая и ее экстремальные значения достигаются на границе $\partial G(x)$. В метрике пространства непрерывных функций $C\left(\overline{G(x)}\right)$ получаем оценку

$$\varepsilon = \max_{y\in G(x)} \left|\varepsilon_1(y)\right| \le \frac{1}{2\pi} \max_{y\in\partial G(x)} \left| \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta)\, u((\eta)}{\left|y-\eta\right|} d\eta \right|. \qquad (1.11)$$

Таким образом с помощью первого способа мы выяснили, что *погрешность* продолженных аномалий силы тяжести, возникающая в результате *замены субгармонической функции функцией гармонической,* зависит от *кривизны* эквипотенциальных поверхностей поля, *величины* аномалий и *меры* той локальной области, в которую осуществляется продолжение.

Перейдем теперь к оценке разности (1.10), переписав ее в более удобном для исследования виде

$$\varepsilon\,(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T(y)}{\partial x_k} \delta\,\nu_k = (\nabla T(y), \quad \delta \;\; \nu(x)),$$

где $\delta\;\;\mathbf{\nu} = (\delta\,\nu_1, \delta\,\nu_2, \delta\,\nu_3)^*$ — вектор с компонентами $\partial \nu_k = \cos(x_k, \nu_y) - \;\; - \cos(x_k, \nu_x)$, $\nu_x = \nu(x)$. Представляя его в виде преобразования (1.5) вектора-смещения $\delta\mathbf{x} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)^*$, получим с учетом неравенства Коши-Буняковского следующее выражение для оценки в метрике $C\left(G(x)\right)$ погрешности $\varepsilon\,(x,y)$

$$\varepsilon = \max_{y\in G(x)} \left|(\nabla T(y), \left(Grad\,\mathbf{\nu}\,(x)\right)^* \delta\,\mathbf{x})\right| \le \frac{\tau_0}{a} \sqrt{1+\frac{a^4}{b^4}} \left\|\delta\,\mathbf{x}\right\|_c, \qquad (1.12)$$

где

$$\tau_0 = \left\|\nabla T(y)\right\|_{C(G(x))},$$

$$\left\|Grad\,\mathbf{\nu}\,(x)\right\|_{C(G(x))} = \max_{y\in G(x)} \sqrt{a_1^2(y)} \le \frac{1}{a}\sqrt{1+\frac{a^4}{b^4}},$$

a, b - большая и малая полуоси сфероида ∂U_x, проходящего через точку x. Полученная оценка не противоречит оценке (1.11). Действительно, в оценке (1.12) погрешность продолженных как гармонические функции аномалий силы тяжести зависит также от кривизны эквипотенциальных поверхностей поля, величины аномалии и размеров области, в которую продолжаются аномалии.

Полученные соотношения можно использовать для оценки точности различных трансформаций гравитационных аномалий, выполняемых по правилам преобразования поля гармонических функций. Проиллюстрируем это на примерах. Пусть требуется найти погрешность трансформации аномалии $\tau(y)$, $y \in \partial\, G(x)$, связанной с вычислением параметров строения среды приповерхностного слоя Земли толщиной не более 200 км в ограниченной области $G(x)$. Отождествляя указанные трансформации с продолжением поля в локальную область $G(x)$ и принимая для оценки погрешности зависимость (1.11), выберем в качестве локальной области для простоты последующих выкладок усеченный двумя сферическими поверхностями круглый конус с вершиной в центре Земли, меньшее и большее (по площади) основания которого отстоят от центра на расстояниях R и R_1 соответственно. Будем считать, что ось конуса проходит через точку x на меньшем основании усеченного конуса $G(x)$, а верхнее его основание совпадает с земной поверхностью $\partial\, G$ и $|x| + 200 = R_1$, где R_1- среднее значение радиуса Земли, равное 6 371,1 км. Направив ось $0x_3$ по высоте конуса, совместим ее с полярной осью сферической системы координат и определим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho \sin\alpha \cos\beta, \quad x_1 = 0, \quad 0 \le \alpha \le \varphi < \pi, \\ \xi_2 &= \rho \sin\alpha \sin\beta, \quad x_2 = 0, \quad 0 \le \beta \le 2\pi, \\ \xi_3 &= \rho \cos\alpha, \qquad\quad x_3 = R, \quad R \le \rho \le R_1, \end{aligned}$$

причем параметр φ будем менять в пределах от $0^o30'$ до 10^o, что примерно будет соответствовать изменению диаметра большого основания конуса от 110 до 2 200 км. Если в окрестности $G(x)$ точки x амплитуда τ_0 аномалии составляет

$$\tau_0 = \left| \max_{y\in\overline{G(x)}} \tau(y) - \min_{y\in\overline{G(x)}} \tau(y) \right|,$$

то, выбирая для оценки функции $a^2(y), \quad y \in G(x)$, приближение $a_0^2(y)$, после несложных вычислений найдем

$$\frac{\varepsilon}{\tau_0} \le 2 \left| 1 - \sqrt{2(1-\cos\varphi)} - r + \sqrt{1 - 2r\cos\varphi + r^2} + \right.$$

$$+ \ln \frac{r(\sqrt{1-\cos\varphi} + \sqrt{r})}{\sqrt{1-\cos\varphi}} \cdot \frac{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2} - 1}{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi+r^2} + 1} -$$

$$\left. \cos\varphi \ln \frac{r + \sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2} - \cos\varphi}{1 + \sqrt{2(1-\cos\varphi)} - \cos\varphi} \right|,$$

где $r = \frac{R_1}{R}$. Для избранного набора локальных областей $G(x)$ параметр $\frac{\varepsilon}{\tau_0}$ колеблется в пределах $0.478516 \cdot 10^{-3} \le \frac{\varepsilon}{\tau_0} \le 0.290601 \cdot 10^{-1}$. Отсюда при известной амплитуде аномалии легко определяется погрешность отклонения в $G(x)$ субгармонической функции от функции гармонической. С сожалением приходится констатировать, что данные об амплитудах аномалий практически отсутствуют. В самом деле, мы располагаем приближенной информацией о возможных колебаниях аномалий только на земном рельефе ∂G, тогда как для вычисления погрешности ε нужны сведения об отклонениях реального гравитационного поля от поля конкретного сфероида (с определенным распределением в нем масс Земли) не столько на ∂G в окрестности точки x, сколько на границе усеченного конуса и, конечно же главным образом, на его нижнем основании, где колебания поля экстремальны. Поэтому для представления о возможных колебаниях погрешности приходится прибегать к правдоподобной гипотезе о том, что амплитуды аномалий в локальных областях типа рассматриваемых вряд ли будут меньше 10 000 мгл (по оценкам нормального градиента поля). В соответствии с этим погрешность будет колебаться в пределах $4.78 \le \varepsilon \le 290.6$ (мгл). Если же требуется оценить погрешность ε продолженных аномалий $\tau(x), x \in \partial G$, как гармонические функции в область $G(x) \bigcap G^+$, то при условии, что амплитуды τ_0 продолжаемых аномалий не превосходят 150 мгл, а локальные области $G(x)$ выбираются в виде усеченных конусов с параметрами $0^o 30' \le \varphi \le 10^o$; $0 \le \beta \le 360^o$; $6371.1 \le \rho \le 6571.1$ (км), нижние основания которых совмещаются с земным рельефом. по формуле (1.11) получим $0.07 \le \varepsilon \le 6.3$ (мгл). В то же время по формуле (1.12) с учетом того, что диаметры $\|\delta x\|$ нижних оснований рассматриваемого семейства усеченных конусов колеблется в пределах $110 \le \|\delta x\| \le 2200$ (км), а параметры сфероида, аппроксимирующего поверхность ∂G, равны $a = 6378.2$ км, $b = 6356.9$ км, будем иметь $3.67 \le \varepsilon \le 73.41$ (мгл). Расхождение в оценках погрешности одной и той же трансформации аномалий $\tau(x)$ в локальной области $G(x) \bigcap G^+$, полученных по формулам (1.11) и (1.12), можно объяснить тем, что в этих оценках вместо функции $a^2(\eta)$, характеризующей кривизну реального поля в каждой точке η области $G(x)$, зависящую, очевидно, не только от особенностей регионального поля, но и от особенностей данной аномалии, используются ее далекие приближения $a_0^2(\eta)$ и $a_1^2(\eta)$, характеризующие кривизны регионального поля в виде концентрических сфер и конфокальных сфероидов соответственно. Действительно, так как область малой меры $G(x)$ находится вблизи локальных и на почтительном расстоянии от региональных особенностей поля, то в соответствии с соотношением (1.6) будем иметь

$$\max_{\eta\in\overline{G(x)}} a_i^2(\eta) < \max_{\eta\in\overline{G(x)}} a^2(\eta), \quad i = 0,1.$$

(1.13)

Отсюда, между прочим, уже следует, что обе оценки погрешности являются *заниженными.* А то, что оценка погрешности по формуле (1.11) существенно меньше оценки по формуле (1.12), связано не столько с указанной причиной, сколько с ее следствием: в первой формуле используются приближения $a_i^2(\eta)$, в то время как во второй — $\sqrt{a_i^2(\eta)},\ \eta \in G(x)\bigcap G^+$. Легко подсчитать, что для выбранного вида областей

$$a_0^2(\eta) \le a_1^2(\eta) \le 0.49603961 \cdot 10^{-7},$$

тогда как

$$\sqrt{a_0^2(\eta)} < \sqrt{a_1^2(a,0,0)} = \ = \sqrt{a_1^2(0,a,0)} = 0.22247155 \cdot 10^{-3}$$

и поэтому различия в оценках по формулам (1.11) и (1.12), в которых вместо функции используются далекие ее приближения $a_i^2(\eta)$ вполне объяснимы. В свою очередь обнаруженное различие оценок погрешности трансформации аномалий силы тяжести по правилам преобразования гармонических функций вместе с неравенством (1.13) дают основание для предположения, что и оценка погрешности трансформации аномалии, связанной с определением параметров среды (из первого примера), также занижена, по-видимому, на порядок. Как бы там ни было, рассмотренные примеры убеждают, что *погрешности* замены функции $u(\eta)$, удовлетворяющей в локальной области $G(x)$ уравнению аномалий силы тяжести, функцией $v(\eta)$, гармонической в той же области, *могут достигать* в зависимости от вида трансформации *недопустимых величин.* Положение дел усугубляется еще и тем, что оценки погрешностей той или иной трансформации в каждой из локальных, даже пересекающихся между собой, областей $G(x)$ и $G(y)$ не дают возможности оценить общую погрешность трансформации в объединении $G(x)\bigcup G(y)$, если $x \ne y \in R^{(3)}$. Действительно. если в точке x уклонение отвеса $\vartheta(x)$ равно 60'', а в точке $y - \vartheta(y) = 0$, то «истинная» аномалия $\delta g(x)$ в точке x, определяемая в виде модуля разности градиентов реального и нормального потенциалов, будет равна

$$\delta\, g(x) = \left|\mathbf{g}(x) - \boldsymbol{\gamma}(x)\right| = \left(4\gamma^{\ 2}(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} + 4\gamma(x)\tau(x)\sin^2\frac{\vartheta(x)}{2} + \tau^2(x)\right)^{1/2}$$

а в точке y, очевидно, $\delta g(y) = \tau(y)$. Поэтому при переходе от локальной области $G(x)$ к такой же области $G(y)$ истинная аномалия будет отличаться от классической на величину

$$\delta g(x) = 2\gamma(x)\sin\frac{\vartheta(x)}{2} \approx 285.25 \text{ мгл},$$

если даже классическая аномалия $\tau(x)$ равна нулю в обеих точках x и y из $R^{(3)}$. Ясно, что преобразование поля $\tau(\eta)$ в каждой из областей $G(x)$ и $G(y)$ при $\tau(x) = \tau(y) = 0$ и $x \ne y$ по правилам трансформирования гармонических функций не дает возможности обнаружить истинную аномалию, достигающую величин, соизмеримых со значениями преобразуемых аномалий даже в регионах со спокойным рельефом. Вот почему область применения методов обработки и интерпретации аномалий силы тяжести (как и аэромагнитных аномалий), развитых на базе теории гармонических и аналитических функций, ограничивается в основном рамками разведочной геофизики и не может без дополнительных разработок расширяться до изучения глубинной региональной структуры Земли. В связи с этим вопрос о том, следует или не следует учитывать природу аномалий $\tau(x),\ x \in \partial G$, при их трансформациях, направленных на исследование глубинных характеристик Земли, альтернативы не имеет и задачи о восстановлении потенциала по значениям модуля его градиента выдвигается в число актуальнейших проблем геофизики.

1.4. Определение потенциала притяжения. Задача, которую предстоит рассмотреть, формулируется следующим образом: *определить потенциал притяжения $V(x)$ телом G^- в заданной точке x области G^+ по значениям модуля его градиента $q(x)$, заданным в любой точке x границы ∂G области и принадлежащим классу $C(\partial G)$.* Другими словами, требуется найти в неограниченной области G^+ регулярное решение $V(x)$ уравнения Лапласа,

принадлежащее классу $C^{(2)}(G^+)\bigcap C^{(1)}(\overline{G^+})$ и удовлетворяющее граничному условию $q(x)=\left|-\nabla V(x)\right|,\ x\in\partial G$, т.е. требуется решить следующую нелинейную задачу

$$\Delta V(x)=0,\quad x\in G^+,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_k}\right)^2=q^2(x),\quad x\in\partial G, \tag{1.14}$$

$$V(x)\to 0 \text{ при } |x|\to\infty.$$

Намереваясь использовать для решения задачи эффективные методы теории потенциала, уточним некоторые сопутствующие понятия и определения. Прежде всего будем считать заданным нормальный потенциал

$$U(x)=f\int_{G_0^-}\frac{\sigma_0(\xi)d\xi}{|x-\xi|}+\Omega(x), \tag{1.15}$$

нормальный потенциал притяжения $\Phi(x)=U(x)-\Omega(x)$ которого развивается массами Земли, распределенными по объему G_0^- с известной плотностью $\sigma_0(\xi),\ \xi\in G_0^-$, а потенциал $\Omega(x)$ центробежной силы задается таким же, каким он был в выражении (1.1) для потенциала силы тяжести. В связи с этим заданным оказывается и семейство нормальных эквипотенциальных поверхностей $\partial U_x\colon U(y)=C_x$, параметризованное точкой x пространства $R^{(3)}$, а также семейство внутренних (направленных из области G^+ в область G^-) нормалей $\mathbf{\nu}(x)=$ $=\left\{\cos(\mathbf{\nu},x_k)\right\}$ к поверхности ∂U_k в точке x совместно с нормальными значениями силы тяжести $\gamma(x)=\left|-\nabla U(x)\right|$. Заданным считается и уравнение поверхности Земли $\partial G\colon F(x)=0$. Причем для удовлетворения грядущим требованиям разрешимости задачи избранным методом необходимо, чтобы поверхность ∂G была многообразием Ляпунова [85] или, что то же самое, чтобы она описывалась функцией класса $C^{(1,\alpha)}(G^-),\ 0<\alpha\le 1$, с непрерывными по Гельдеру (степени α) в области G^- первыми производными. Тогда заданными окажутся внутренние (по отношению к области G^-) нормали $m(x)$ с компонентами

$$\cos(x_k,m)=\frac{\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_k}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_i}\right)^2}},\quad k=1,2,3$$

к поверхности ∂G в любой ее точке x и величина

$$\cos(\nu,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(\nu,x_k)\cos(x_k,m).$$

Если бы на поверхности Земли помимо значений модуля градиента потенциала силы тяжести $g(x)$ и нормали $\mathbf{m}(x)$ к ∂G измерялось также и направление градиента $\mathbf{n}(x)=\left\{\cos(n,x_k)\right\}$, то нелинейную граничную задачу (1.14) можно было бы переформулировать к виду линейной задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta V(x)=0,\quad x\in G^+,$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial m(x)}=\varphi(x),\quad x\in\partial G, \tag{1.16}$$

$$V(x)\to 0 \text{ при } |x|\to\infty,$$

где

$$\varphi(x)=\frac{\partial W(x)}{\partial m(x)}-\frac{\partial \Omega(x)}{\partial m(x)}=g(x)\cos(n,m)-\omega^{2}\sum_{k=1}^{2}\cos(n,x_k)x_k,$$

$$\cos(n,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(n,x_k)\cos(x_k,m).$$

Однако, как уже подчеркивалось неоднократно, направление $\mathbf{n}(x)$ градиента потенциала нам неизвестно и от указанного способа решения задачи остаются только наводящие соображения для построения определенного итерационного процесса восстановления потенциала притяжения.

Прежде чем углубиться в его детали, охарактеризуем положение дел с граничными данными задачи. В рамках принятой модели значения силы тяжести обусловлены не только притяжением масс Земли, но и ее вращением вокруг своей оси, поэтому из выражения (1.1) найдем, что

$$g(x)=q(x)\left(1+2\omega^{2}\frac{x_1\dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2}}{q^2(x)}+\omega^{4}\frac{x_1^2+x_2^2}{q^2(x)}\right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

Так как второе и третье в скобках слагаемые оцениваются, очевидно, числами

$$\left|2\omega^{2}\frac{x_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{q^2(x)}\right|<690.9593\cdot10^{-5},\quad \omega^{4}\frac{x_1^2+x_2^2}{q^2(x)}<1.193562\cdot10^{-5},$$

а отношение третьего слагаемого ко второму не превосходит

$$\left|\frac{\omega^{2}(x_1^2+x_2^2)}{2\left(x_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)}\right|<1.727398\cdot10^{-3},$$

то для значений модуля градиента потенциала притяжения из представления (1.17) получим с относительной точностью до величин порядка 10^{-6} следующее выражение

$$q(x)=g(x)-\omega^{2}(x_1\cos(x_1,e)+x_2\cos(x_2,e)),\quad x\in\partial G, \quad (1.18)$$

где неизвестные компоненты $\cos(x_k,e)$ единичной нормали $\mathbf{e}(x)$ к поверхности $\partial V_x{:}V(y)=C_x$ описываются выражениями, аналогичными формулам (1.2), в которых вместо потенциала силы тяжести должен использоваться потенциал притяжения.

И, наконец, предположим, что распределение плотности $\sigma_0(x)$, $x\in G_0^-$, и область G_0^- выбраны настолько удачно, что модуль градиента нормального потенциала притяжения $\chi(x)=\left|-\nabla\Phi(x)\right|$ незначительно (в принятой метрике) отличается от значений $g(x)$, $x\in\partial G$, а возмущающий потенциал $T(x)$, определяемый в виде

$$T(x)=W(x)-U(x)=V(x)-\Phi(x)$$

составляет небольшую долю потенциала притяжения. Тогда потенциал притяжения $V(x)$, $x\in\overline{G^+}$, можно восстановить в замкнутой области $\overline{G^+}$ при помощи последовательных приближений

$$V^{(i)}(x)=V^{(0)}(x)+T^{(i)}(x),$$
$$i=0,1,\ldots,\infty;\quad V^{(0)}(x)=\Phi(x); \quad (1.19)$$
$$T^{(0)}(x)=0;\quad \mathbf{e}_0(x)=\boldsymbol{\nu}(x),$$

каждое из которых находится аналогично решению граничной задачи (1.16) следующим образом.

Вначале по определенным на предыдущем i - ом шаге процесса приближениям $\cos(x_k, e_i)$ направляющих косинусов нормали $\mathbf{e}(x)$ вычисляем на границе ∂G в соответствии с формулой (1.18) следующее $(i+1)$ - е приближение силы притяжения

$$q^{(i+1)}(x) = g(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^{2} x_k \cos(x_k, e_i), \quad x \in \partial G,$$

и значения функций

$$\cos(e_i, m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(e_i, x_k) \cos(x_k, m), \quad x \in \partial G,$$

$$\varphi^{(i+1)}(x) = q^{(i+1)}(x) \cos(e_i, m) - \chi(x) \cos(\nu, m), \quad x \in \partial G.$$

Далее с этими данными решаем внешнюю задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta T^{(i+1)}(x) = 0, \quad x \in G^+,$$

$$\frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial m(x)} = \varphi^{(i+1)}(x), \quad x \in \partial G,$$

(1.20)

$$T^{(i+1)}(x) \to 0, \text{ при } |x| \to \infty.$$

Попутно заметим, что данная задача имеет единственное решение. Этот результат известен с начала века и убедиться в его справедливости довольно просто. В самом деле, если бы задача имела не одно, а, скажем, два решения $T_1^{(i+1)}(x)$ и $T_2^{(i+1)}(x)$, то, обращаясь к известной формуле Грина [85]

$$\int_{G^+} v(x) \Delta u(x) dx = -\sum_{k=1}^{3} \int_{G^+} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} dx + \int_{\partial G} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds_x$$

и полагая $v(x) = u(x) = T_1^{(i+1)}(x) - T_2^{(i+1)}(x)$ с учетом того, что оба решения определены граничными данными $\varphi^{(i+1)}(x)$, $x \in \partial G$, придем к заключению, что $\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0$, $x \in G^+$, $k = 1, 2, 3$. Данное условие вместе с требованием $u(\infty) = 0$ обеспечивает единственность.

Решение задачи будем искать в виде потенциала простого слоя

$$T^{(i+1)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{\delta^{(i+1)}(\xi)}{|x - \xi|} ds_\xi, \quad x \in G^+,$$

(1.21)

масс, распределенных по поверхности ∂G с непрерывной плотностью $\delta^{(i+1)}(x)$, $x \in \partial G$. Неизвестную плотность определим из граничного условия, которое приводит в соответствии с известной теоремой скачка [85] к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\delta^{(i+1)}(x) + \int_{\partial G} k(x, \xi) \delta^{(i+1)}(\xi) ds_\xi = \varphi^{(i+1)}(x), \quad x \in \partial G,$$

(1.22)

где ядро интегрального оператора уравнения дается выражением

$$k(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial m(x)} \frac{1}{|x - \xi|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(u, m)}{|x - \xi|^2},$$

$$\cos(u, m) = \sum_{k=1}^{3} \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|} \cos(\xi_k, m), \quad u = x - \xi \in R^{(3)}.$$

В результате решения уравнения (1.22) вычисляем с использованием представления (1.21) приближения производных потенциала притяжения

$$\partial_k V^{(i+1)}(x) = \frac{\partial V^{(i+1)}(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial x_k},$$

(1.23)

где

$$\frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\frac{x_k - \xi_k}{\left|x-\xi\right|^3}\delta^{(i+1)}(\xi)d\xi,$$

что дает возможность определить последующие приближения граничных значений функций

$$\cos(e_{i+1}, x_k) = \frac{\partial_k V^{(i+1)}(x)}{q^{(i+1)}(x)}, \quad x \in \partial G,$$

$$q^{(i+2)}(x) = g(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^{2} x_k \cos(x_k, e_{i+1}), \quad x \in \partial G,$$

(1.24)

$$\varphi^{(i+2)}(x) = q^{(I+2)}(x)\cos(e_{i+1}, m) - \chi(x)\ \cos(\nu, m), \quad x \in \partial G.$$

Определив приближения (1.24), переходим снова к решению граничной задачи (1.20) — (1.22) со сменой индекса $(i+1)$- го приближения на $(i+2)$- е. Это приведет к определению следующего в схеме (1.19) приближения $V^{(i+2)}(x)$ потенциала притяжения и т.д. и т.п.

Предложенный способ решения нелинейной граничной задачи (1.14) можно уточнить, если вместо приближений граничной функции $q(x)$, конструируемых на основе представления (1.18), использовать ее приближения, исходя из изображения

$$q(x) = g(x)\left(1 + 2\omega^2 \frac{x_1 \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2}}{q^2(x)} + \omega^4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{q^2(x)}\right)^{-1/2},$$

следующего из точной зависимости (1.17). В этой схеме приближения $V^{(i)}(x)$ потенциала притяжения $V(x)$ должны, по-видимому, сходиться быстрее.

Рассмотренные схемы восстановления потенциала притяжения нуждаются в строгом обосновании. Нам необходимо привести убедительные соображения не только в отношении разрешимости граничной задачи (1.21) - (1.22), которой заменена корректная в математическом плане задача (1.20), но и доказать сходимость последовательности решений линейных граничных задач (1.22), а также сходимость самих приближений $V^{(i)}(x)$ к потенциалу притяжения $V(x)$, $x \in \overline{G^+}$, являющемуся решением нелинейной граничной задачи (1.14).

1.5. Вопросы разрешимости задачи. Перейдем к строгому обоснованию предложенной схемы восстановления потенциала притяжения. Отправным пунктом последующих рассмотрений является

Лемма. *Если граница ∂G ограниченной области G^- является поверхностью Ляпунова, то справедливы равенства*

$$\int_{\partial G}\frac{\partial}{\partial m(x)}\Omega(x,\xi)\,ds_\xi = \begin{cases} 1, & x \in G^+, \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \partial G, \\ 0, & x \in G^-, \end{cases}$$

где $\Omega(x,\xi) = \left(4\pi\left|x-\xi\right|\right)^{-1}, \quad G^+ = R^{(3)} \setminus \overline{G^-}.$

В самом деле, если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(G^+)\bigcap C^{(1)}(\overline{G^+})$, а граница ∂G, разделяющая области G^+ и G^-, является границей Ляпунова, то к функциям $u(x)$ и $\Omega(x,\xi)$ в области G^+ можно применить формулу Грина [85]. В результате получим

$$\int_{G^+}\Delta u(\xi)\Omega(x,\xi)d\xi = \int_{\partial G}\left\{\frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\Omega(x,\xi) - u(\xi)\frac{\partial\Omega(x,\xi)}{\partial u(\xi)}\right\}ds_\xi,$$

(1.25)

поскольку функция $\Omega(x,\xi)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $R^{(3)}$.

Далее, если точка x лежит внутри области G^- вместе с достаточно малой шаровой окрестностью $O(x,\xi)$ радиуса $\varepsilon > 0$, то, распространяя на область $G^- \setminus O(x,\xi)$ формулу Грина для функций $u(\xi) \in C^{(2)}(G^-) \bigcap C^{(1)}(\overline{C^-})$ и $\Omega(x,\xi)$, получим

$$\int\limits_{G^- \setminus O(x,\xi)} \{\Delta u(\xi)\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \Delta_\xi \Omega(x,\xi)\} d\xi =$$

$$= \int\limits_{\partial G \bigcup \partial O(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial\, \Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi . \qquad (1.26)$$

Интеграл по области $G^- \setminus O(x,\xi)$ при $\varepsilon > 0$ стремится к несобственному интегралу

$$\int\limits_{G^-} \Delta\, u(\xi)\, \Omega(x,\xi)\, d\xi ,$$

(1.27)

так как $\Delta_\xi \Omega(x,\xi) = 0$ при $\xi \in O(x,\xi) - \{x\}$. В то же время поверхностный интеграл по одной из компонент границы $\partial G \bigcup \partial\, O(x,\varepsilon)$ области $G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, а именно по сфере $\partial O(x,\varepsilon)$, окружающей точку x при $\varepsilon \to 0$ принимает значение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)}\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial\, \Omega(x,\xi)}{\partial n(\xi)} \right\} ds_\xi =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} u(\xi)\, \frac{\partial\, \Omega(x,\xi)}{\partial n(\xi)}\; ds_\xi = -u(x)$$

(1.28)

Это следует из теоремы о среднем значении интеграла, свойств фундаментального решения $\Omega(x,\xi)$, непрерывности и ограниченности нормальной производной функции $u(\xi)$ на $\partial\, O(x,\varepsilon)$, а также из того, что дифференцирование по внутренней нормали границы заменено дифференцированием по противоположному направлению роста радиуса сферы $\partial\, O(x,\varepsilon)$.

Ели же точка x лежит на границе ∂G области G^-, то граница ∂D области $D = G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, на которую распространяется формула Грина для функций $u(\xi) \in C^{(2)}(G^-) \bigcap C^{(1)}(\overline{C^-})$ и $\Omega(x,\xi)$, будет состоять из двух компонент: части $\partial G \setminus\ \setminus \partial G(x,\varepsilon)$ границы ∂G, из которой вырезан участок $\partial G(x,\varepsilon)$, находящийся внутри сферы $\partial\, O(x,\varepsilon)$, и части $\partial\, O_i\,(x,\varepsilon)$ сферы $\partial\, O(x,\varepsilon)$, лежащей в области G^-, и поэтому

$$\int\limits_{G^- \setminus O(x,\varepsilon)} \{\Delta u(\xi)\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \Delta_\xi\, \Omega(x,\xi)\} d\xi =$$

(1.29)

$$= \int\limits_{(\partial G \setminus \partial G(x,\varepsilon)) \bigcup \partial O_i(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial\, u(\xi)}{\partial\, m(\xi)}\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial\Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi$$

Левая часть равенства (1.29), представленная интегралом по области $G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться, как и в предыдущем случае (расположения точки x), к несобственному интегралу (1.27) по области G^-. Точно также поверхностный интеграл в правой части равенства (1.29), вычисляемый на множестве $\partial G \setminus \partial G(x,\varepsilon)$, будет стремиться при $\varepsilon \to 0$ к несобственному интегралу на границе ∂G. Значения обоих несобственных интегралов равны пределу поверхностного интеграла по множеству $\partial\, O_i(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Для вычисления этого

предела воспользуемся тем, что граница ∂G является многообразием Ляпунова. Опираясь на это свойство, прежде всего восстановим в точке $x \in \partial G$ внутреннюю нормаль $\mathbf{m}(x)$ и проведем через эту точку касательную плоскость. Если теперь ввести в точке $x \in \partial G$ местную систему декартовых прямоугольных координат $y = (y_1, y_2, y_3)$, направив ось $0y_3$ по нормали $\mathbf{m}(x)$ и расположив оси $0y_1$ и $0y_2$ произвольным образом в касательной плоскости, то поверхность ∂G, как ляпуновское многообразие, внутри окрестности $O(x,\varepsilon)$ можно параметризовать непрерывно дифференцируемой функцией $y_3 = \varphi(y_1, y_2)$ в области $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$, где $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$ — проекция поверхности $\partial O_i(x,\varepsilon)$ на координатную плоскость $0y_1, y_2$. Поскольку начало местной системы координат совмещено с точкой $x \in \partial G$, а плоскость $0y_1y_2$ — с касательной плоскостью к поверхности ∂G в этой точке, то функция $y_3 = \varphi(y_1, y_2)$ вместе со своими частными производными первого порядка обращаются в нуль в начале координат и, следовательно, в области $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$ ее можно подать в виде

$$y_3 = \varphi(y_1, y_2) \equiv \varphi(y_1, y_2) - \varphi(0,0) = \frac{\partial \varphi(y_1', y_2')}{\partial y_1}\, y_1 + \frac{\partial \varphi(y_1', y_2')}{\partial y_2}\, y_2, \qquad (1.30)$$

где $0 \le y_1' \le y_1$, $0 \le y_2' \le y_2$. Для вычисления интеграла по поверхности $\partial O_i(x,\varepsilon)$ воспользуемся еще параметризацией в сферических координатах

$$y_1 = \varepsilon \sin\alpha \cos\beta, \quad y_2 = \varepsilon \sin\alpha \sin\beta, \quad y_3 = \varepsilon \cos\alpha,$$
$$0 \le \alpha \le \alpha_0, \qquad 0 \le \beta \le 2\pi, \qquad ds_\xi = \varepsilon^2 \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta,$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(\beta)$ определяется зависимостью (1.30), когда $(y_1, y_2) \in \partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$. Отправляясь от связи (1.30), будем, очевидно, иметь

$$\cos\alpha = \psi_1(\varepsilon', \alpha', \beta') \sin\alpha \cos\beta + \psi_2(\varepsilon', \alpha', \beta') \sin\alpha \sin\beta = \psi(\varepsilon', \alpha, \beta),$$

где $\psi_i(\varepsilon', \alpha', \beta')$ суть значения производных $\partial_i\, \varphi(y_1', y_2')$, $i = 1,2$, в сферических координатах, а $\psi(\varepsilon', \alpha, \beta)$ — функция ограниченная, непрерывная и обращающаяся в нуль одновременно с $\varepsilon' < \varepsilon$. В связи с этим и на основании характеристических свойств интегрируемых функций находим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial O_i(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi = -\frac{u(x')}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\beta \int\limits_0^{\alpha_0} \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2} u(x) + \frac{u(x')}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{2\pi} \Big[-\psi(\varepsilon', \alpha', \beta) \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} d\beta = -\frac{1}{2} u(x). \qquad (1.31)$$

Таким образом для функции $u(x)$ класса $C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D})$ из соотношений (1.25), (1.28), (1.29) и (1.31) установлены следующие интегро-дифференциальные тождества

$$\int\limits_D \Delta u(\xi)\, \Omega(x,\xi)\, d\xi = \int\limits_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\, \Omega(x,\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi - \left\{ \begin{array}{ll} u(x), & x \in D \\ \frac{1}{2} u(x), & x \in \partial G \\ 0, & x \in R^{(3)} \setminus \overline{D}, \end{array} \right. \qquad (1.32)$$

где область D может принимать значения G^- или G^+. Однако, если $D = G^+$, то проведенные рассмотрения распространяются только на класс функций из $C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D})$, которые в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяют (как нетрудно видеть) условиям

$$u(x) = o\left(|x|^{-1}\right), \quad \left|\nabla u(x)\right| = o\left(|x|^{-2}\right), \quad \left|\Delta u(x)\right| = o\left(|x|^{-3}\right).$$

Из тождеств (1.32) при $u(x) = 1$, $x \in \overline{G^-}$, в частности, следует справедливость леммы.

Теперь можно убедиться, что задача (1.21) — (1.22) имеет единственное решение.

Теорема 1.2 (единственности). *Если для любой функции* $\varphi^{(1)}(x)$, $x \in \partial G$, *из ограниченного в* $C(\partial G)$ *множества интегральное уравнение (1.22) имеет непрерывные решения* $\delta^{(i)}(x)$, $x \in \partial G$, *то число этих решений не более одного.*

Доказательство начнем из противоположного предположения, что для одной и той же функции $\varphi^{(i)} \in C(\partial G)$ существует по меньшей мере два непрерывных решения $\delta_1^{(i)}(x)$ и $\delta_2^{(i)}(x)$. Тогда, очевидно, что для разности $\delta(x) = \delta_1^{(i)}(x) - \delta_2^{(i)}(x)$, $x \in \partial G$, представляющей собой непрерывную на ∂G функцию как разность двух непрерывных функций, будем иметь равенство

$$\partial(x) + \int_{\partial G} k\,(x,\xi)\delta\,(\xi) ds_\xi = 0. \qquad (1.33)$$

Это равенство относительно функции $\delta\,(x)$ есть линейное однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1.22). С его получением доказательство теоремы сводится к выяснению вопроса существуют или нет нетривиальные решения класса $C(\partial G)$ однородного уравнения (1.33).

Особенно просто вопрос выясняется в случае, когда многообразие Ляпунова ∂G представляет собой границу выпуклой области G. Из геометрических соображений ясно, что в этом случае $\cos(u,m) \le 0$, когда $u = x - \xi \in \partial G$, и в соответствии с утверждением леммы

$$\int_{\partial G} k\,(x,\xi) ds_\xi = 1, \;\; x \in \partial G. \qquad (1.34)$$

Поэтому, отправляясь от этого равенства, можем переписать однородное уравнение (1.33) в виде

$$\int_{\partial G} k\,(x,\xi) \left[\delta(x) + \delta(\xi)\right] ds_\xi = 0, \;\; x \in \partial G.$$

Пусть точка x поверхности ∂G является точкой глобального экстремума функции $\delta(x)$ на ∂G. Тогда сумма $\delta(x) + \delta(\xi)$, $x, \xi \in \partial G$, будет знакопостоянной. Равенство (1.34) с учетом структуры ядра свидетельствует о том, что $k\,(x,\xi) \ge 0$ для любой из точек x или ξ выпуклой поверхности ∂G. Поэтому из предыдущего интегрального равенства получаем

$$\delta(\xi) = -\delta(x), \;\; x, \xi \in \partial G,$$

что, естественно, противоречит непрерывности функции $\delta(x)$ на ∂G, если только $\delta(x) \ne 0$.

Следовательно, однородное интегральное уравнение (1.33) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1.22), если имеет решения, то не более одного. Теорема для выпуклой поверхности ∂G доказана.

Распространим теперь ее на более общий случай, когда многообразие ∂G является поверхностью Ляпунова. Пусть $\delta\,(x)$, $x \in \partial G$, непрерывное решение однородного уравнения (1.33). Покажем, что непременно $\delta\,(x) = 0$, $x \in \partial G$. Потенциал простого слоя с плотностью $\delta(x)$, удовлетворяющей уравнению (1.33), будет гармонической функцией $T(x)$ и в неограниченной области G^+ и в ограниченной области G^-. Эта функция будет непрерывной во всем пространстве $R^{(3)}$, поскольку граничные значения ее нормальной производной $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_i}$ по внутренней нормали $\mathbf{m}_i$ на ∂G равны нулю (при стремлении точки $y \in \mathbf{m}_i(x)$ по внутренней по отношению к области G^+ нормали в точке $x \in \partial G$). Равенство $\dfrac{\partial\, T(x)}{\partial\, m_i} = 0$ следует из того, что плотность $\delta(x)$ потенциала $T(x)$ удовлетворяет уравнению (1.22) по условию. Далее, из

формулы Грина

$$\int\limits_{G^+} v(x)\Delta T(x)dx = -\int\limits_{G^+}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}\,dx + \int\limits_{\partial G} v(x)\,\frac{\partial T(x)}{\partial m_i}ds_x$$

справедливой для потенциала $T(x)$ и произвольной функции $v(x)$ класса $C^{(1)}(\overline{G}^+)$, при $v(x) = T(x)$ и с учетом равенства $\Delta T(x) = 0$, $x \in \overline{G}^+$, получаем

$$\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{G^+}\left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}\right]^2 dx = \int\limits_{\partial G} T(x)\frac{\partial T(x)}{\partial m_i}ds_x$$

Отсюда при выполнении условия $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_i} = 0$ вытекает, что должны выполняться равенства $\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_k} = 0$, k=1, 2, 3, и, следовательно, функция $T(x)$ во всей неограниченной области G^+ должна быть постоянной. В то же время в бесконечно удаленной точке потенциал простого слоя $T(x)$ равен нулю. Поэтому $T(x) = 0$ во всей области G^+, включая и ее границу ∂G. Отсюда следует, что $T(x) = 0$ и внутри ограниченной области G^-, т. е. $T(x) \equiv 0$ во всем пространстве $R^{(3)}$. На основании принципа экстремума для гармонической функции $T(x)$ и равенства $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_i}$ заключаем, что и производная $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_e} = 0$ потенциала $T(x)$ по внешней по отношению к G^+ нормали $\mathbf{m}_e(x)$ в точке $x \in \partial G$ равна нулю. Таким образом, если учесть скачок $\delta(x)$ нормальной производной потенциала простого слоя, то получим

$$\delta(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial m_i} - \frac{\partial T(x)}{\partial m_e} \equiv 0,\ \ x \in \partial G.$$

А это в свою очередь означает, что однородное интегральное уравнение (1.33) имеет только тривиальное решение, если ∂G является поверхностью Ляпунова. Итак, теорема для границ типа многообразий Ляпунова полностью доказана.

Теорема 1.3. *Интегральный оператор K задачи (1.22), заданный равенством*

$$K\delta = \int\limits_{\partial G} k(x,\xi)\,\delta(\xi)\,ds_\xi = v(x),\ \ x \in \partial G,$$

и ставящий в соответствие непрерывной функции $\delta(x)$ функцию $v(x)$, является компактным (вполне непрерывным) оператором.

Доказательство. Нетрудно видеть, что интегральный оператор K аддитивен, однороден и на основании равенства (1.34) ограничен. Следовательно, как линейный оператор, он непрерывен. Для обнаружения полной его непрерывности покажем, что он переводит ограниченное множество функций из $C(\partial G)$ в компактное множество того же пространства. Выделим в пространстве $C(\partial G)$ шар

$$S(0,r) = \left\{\partial(x) : \delta \in C(\partial G),\ \ \|\delta\|_C = \max_{x\in\partial G}|\delta(x)| \le r\right\}$$

радиуса $r < \infty$ с центром в нуле. Тогда, ссылаясь на равенство (1.34), будем иметь

$$\|K\delta\|_C = \|v\|_C = \max_{x\in\partial G}\left|\int\limits_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi\right| \le \|\delta\|_C \max_{x\in\partial G}\left|\int\limits_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi\right| = \|\delta\|_C \le r.$$

Отсюда заключаем, что функции $v(x)$ множества $K\Delta \subset C(\partial G)$ равномерно ограничены. Положим $u = x - \xi$ и на основании представления

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\cos(u, \mathbf{m})}{|u|^2} \delta(x-u)\, ds_u$$

и неравенства Липшица

$$|\delta(x_1) - \delta(x_2)| \le L\, |x_1 - x_2|$$

с константой L будем иметь при $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ (для произвольного числа $\varepsilon > 0$)

$$|v(x_1) - v(x_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{\cos(u, \mathbf{m})}{|u|^2} [\delta(x_2 - u) - \delta(x_1 - u)]\, ds_u \right| \le$$

$$\le L|x_1 - x_2| \max_{x \in \partial G} \left| \int_{\partial G} k(x, \xi)\, ds_\xi \right| = L|x_1 - x_2| < L\,\varepsilon.$$

Следовательно, функции $v(x)$ множества $K\Delta$ не только равномерно ограничены, но и равностепенно непрерывны (в метрике $C(\partial G)$) в виду произвольной малости числа $\varepsilon > 0$. Поэтому множество $K\Delta \subset C(\partial G)$ компактно по известной теореме Арцела, а интегральный оператор — вполне непрерывен. Теорема доказана.

Теперь можно перейти к освещению вопроса о существовании решения интегрального уравнения (1.22).

Теорема 1.4 (существования). *Если однородное интегральное уравнение (1.33) в пространстве непрерывных функций $C(\partial G)$ имеет только тривиальное решение, то соответствующее ему неоднородное интегральное уравнение (1.22) имеет решение при любой правой части, принадлежащей ограниченному множеству в $C(\partial G)$.*

Другими словами, из теоремы единственности следует теорема существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Для доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 1.3, в которой утверждается, что интегральный оператор K является компактным. Действительно, если оператор K компактен, то оператор $E - K$, где E - тождественный в $C(G)$ оператор, будет непрерывно обратимым оператором на $C(\partial G)$, ибо его нуль-многообразие

$$N(E-K) = \{\delta : \delta - K\delta = 0, \quad \delta \in C(\partial G)\}$$

состоит, как мы убедились, из единственного нуля. Однако, для обращения оператора $E - K$ нельзя использовать известный ряд Неймана из-за наличия условия (1.34), которое имеет место для любой замкнутой поверхности Ляпунова. Тем не менее, разрешимость на $C(\partial G)$ неоднородного интегрального уравнения (1.22) следует, в частности, из возможности представления ядра оператора K в виде суммы двух ядер, одно из которых будет ядром конечного ранга (вырожденным), а другое — “малым” ядром . Наличие такой возможности позволяет предложить один оптимальный из множества других алгоритм решения линейного интегрального уравнения второго рода с компактным оператором. Однако к вопросу о построении этого алгоритма вернемся только после рассмотрения более общей теории уравнения (1.22) Риса-Шаудера.

Теорема 1.5. *Если K — линейный вполне непрерывный оператор в пространстве $C(\partial G)$, то уравнение $\delta - K\delta = 0$ имеет только тривиальное решение $\delta = 0$.*

Доказательство. Допустим противное, т.е., что условие теоремы не выполняется и подпространство нулей оператора $E - K$ нетривиально

$$N(E-K) = \{\delta : \delta - K\delta = 0, \quad \delta \in C(\partial G)\} \ne \{0\}$$

Покажем, что в этом случае можно построить цепочку

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \ldots \qquad (1.35)$$

строго вложенных друг в друга подпространств нулей операторов $(E-K)^n$, $n=1,2,\dots,\infty$. В самом деле, если $\delta_1 \in N_1 \equiv N(E-K)$ и $\delta_1 \neq 0$, то функция δ_2, удовлетворяющая условию

$$(E-K)\delta_2 = \delta_1 \qquad (1.36)$$

не может, во-первых, равняться нулю из-за того, что $\delta_1 = 0$ по предположению и, во-вторых, она не принадлежит N_1 по определению (1.36). Умножая уравнение (1.36) на оператор $E-K$, будем иметь в силу того, что $\delta_1 \in N_1$

$$(E-K)(E-K)\delta_2 = (E-K)^2\delta_2 = (E-K)\delta_1 = 0$$

Отсюда заключаем, что существует такое отличное от нуля решение δ_2 уравнения (1.36), которое принадлежит

$$\delta_2 \in N_2 \equiv N\left((E-K)^2\right) = \left\{\delta : (E-K)^2\delta = 0, \quad \delta \in C(\partial G)\right\}$$

и не принадлежит N_1, иначе оказалось бы, что $\delta_1 = 0$, а это противоречит исходному предположению. Следовательно, налицо строгое включение $N_1 \subset N_2$. Индукцией по индексу n доказывается справедливость всей цепочки в предположении, что $N_1 \neq \{0\}$.

Действительно, предполагая, что $\delta_n \in N_n \equiv N\left((E-K)^n\right)$ и $\delta_n \neq 0$, $\delta_n \notin N_k$, $k=1,2,\dots,n-1$, зададимся целью определить характеристики функции δ_{n+1}, удовлетворяющей уравнению

$$(E-K)\delta_{n+1} = \delta_n.$$

Прежде всего заключаем, что δ_{n+1} не может равняться нулю, поскольку $\delta_n \neq 0$. Более того, так как

$$(E-K)^k\delta_n \neq 0, \;\; k=0,1,\dots,n-1$$

по предположению, то и для тех же индексов k

$$(E-K)^{k+1}\delta_{n+1} \neq 0$$

и поэтому $\delta_{n+1} \notin N_k$ для $k=1,2,\dots n$. Однако, в силу того, что $\delta_n \in N_n$ имеем

$$(E-K)^{n+1}\delta_{n+1} = (E-K)^n\delta_n = 0$$

и, следовательно, $\delta_{n+1} \in N_{n+1}$, что и доказывает справедливость цепочки (1.35) строгого включения друг в друга подпространств нулей операторов $(E-K)^n$, $n=1,2,\dots,\infty$.

В каждом подпространстве $N_n = N\left((E-K)^n\right)$ пространства $C(\partial G)$ найдется элемент μ_n такой, что $\|\mu_n\|_C = 1$ и $\|\delta - \mu_n\|_C > \dfrac{1}{2}$ для всех $\delta \in N_{n-1}$, $n=2,3,\dots$. Действительно, пусть элемент $\alpha \notin N_{n-1}$, но принадлежит N_n. Такой элемент $\alpha \neq 0$, как мы убедились, предположив, что $N_1 \neq \{0\}$, существует. Положим

$$\inf_{\beta \in N_{n-1}} \|\alpha - \beta\|_C = d.$$

и поскольку $\alpha \notin N_{n-1}$, то, очевидно, $d > 0$. Воспользуемся определением нижней грани и для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ найдем элемент β_ε такой, что

$$d(1-\varepsilon) \le \|\alpha - \beta_\varepsilon\|_C \le d.$$

Рассмотрим теперь элемент

$$\mu_n = \frac{\beta_\varepsilon - \alpha}{\|\alpha - \beta_\varepsilon\|_C}, \qquad \|\mu_n\|_C = 1,$$

$\beta_\varepsilon \in N_{n-1}$.

Этот элемент будет искомым, $\mu_n \in N_n$. В самом деле, он не принадлежит ни одному из подпространств N_{n-1}, $n=2,3,\dots$, иначе выполнялось бы включение $\beta_\varepsilon - \alpha \in N_{n-1}$, т. е.,

$\alpha \in N_{n-1}$, а это не так. Далее, расстояние от элемента μ_n до подпространства N_{n-1}, $n = 2, 3, \ldots$, оценивается в виде

$$\|\mu_n - \beta\|_C = \left\| \frac{\beta_\varepsilon - \alpha}{\|\alpha - \beta_\varepsilon\|} - \beta \right\| = \frac{\|\alpha - (\beta_\varepsilon - \beta\|\beta_\varepsilon - \alpha\|)\|}{\|\beta_\varepsilon - \alpha\|} > \frac{d(1-\varepsilon)}{d} = 1 - \varepsilon,$$

ибо элемент $\beta_\varepsilon - \beta\|\beta_\varepsilon - \alpha\|$ принадлежит N_{n-1}, а $\|\alpha - \beta\| \geq d$ по определению для любого $\beta \in N_{n-1}$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получим

$$\|\delta - \mu_n\| > \frac{1}{2}, \quad \|\mu_n\| = 1, \quad \mu_n \in N_n, \quad \delta \in N_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \qquad (1.37)$$

Рассмотрим последовательность $\{K\mu_n\}$. Она компактна, ибо оператор K — вполне непрерывен, а последовательность $\{\mu_n\}$, $\|\mu_n\|_C = 1$, $\mu_n \in N_n$, ограничена. Для $m > n$ имеем

$$\|K\mu_m - K\mu_n\| = \|\mu_m - (E-K)\mu_m - \mu_n + (E-K)\mu_n\| = \|\mu_m - \mu\|,$$

где $\mu = \mu_n - (E-K)\mu_n + (E-K)\mu_m$. Легко убедиться, что $\mu \in N_{m-1}$. Действительно,

$$(E-K)^{m-1}\mu = (E-K)^{m-1}\mu_n - (E-K)^m\mu_n + (E-K)^m\mu_m = 0,$$

так как при $p > n$: $(E-K)^p\,\mu_n = (E-K)^{p-n}(E-K)^n\,\mu_n = (E-K)^{p-n}\cdot 0 = 0$, что, собственно, следует из включений $N_n \subset N_m$ при $m > n$. Отсюда, ссылаясь на неравенства (1.37), можем записать

$$\|K\mu_m - K\mu_n\| = \|\mu_m - \mu_n\| > \frac{1}{2}, \quad \mu \in N_{m-1}, \quad \mu \in N_m$$

.

Выводом неравенства мы пришли к противоречию: с одной стороны последовательность $\{K\mu_n\}$ компактна, а с другой — удовлетворяет неравенству $\|K\mu_m - K\mu_n\| > \frac{1}{2}$, при $m > n$.

Полученное противоречие показывает, что допущение $N(\varepsilon - k) \neq \{0\}$ неверно и теорема доказана.

Теорема 1.6. *Если K — линейный вполне непрерывный оператор, то множество значений $V(E-K)$ оператора $E-K$ замкнуто в $C(\partial G)$ и оператор $E-K$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{v_n\}$ функций из ограниченного множества в $C(\partial G)$ принадлежит множеству значений $V(E-K)$ оператора $E-K$ и сходится к некоторой функции v_0 при $n \to \infty$. Для каждого значения индекса n найдется такая функция δ_n, что

$$\delta_n - K\delta_n = v_n.$$

Покажем, что $v_0 \in V(E-K)$, а это в свою очередь и будет означать замкнутость множества $V(E-K)$. Если последовательность $\{\delta_n\}$ ограничена, то последовательность $\{K\delta_n\}$ компактна по теореме 1.3. Отсюда вытекает, что последовательность $\{\delta_n\}$ также компактна, потому что

$$\delta_n = v_n + K\delta_n,$$

где последовательность $\{v_n\}$ сходится по предположению, а последовательность $\{K\delta_n\}$

компактна. Вследствие компактности из последовательности $\{\delta_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\delta_{n_k}\}$, сходящуюся к δ_0. Переходя к пределу при $n_k \to \infty$ в равенстве

$$\delta_{n_k} - K\delta_{n_k} = v_{n_k},$$

получим по непрерывности оператора K, что

$$\delta_0 - K\delta_0 = v_0,$$

т. е., что элемент v_0 принадлежит множеству $V(E-K)$ и, следовательно, при ограниченности последовательности $\{\delta_n\}$ область значений $V(E-K)$ оператора замкнута. Вместе с тем, последовательность не может быть неограниченной, поскольку, как сказано в теореме 1.5, нуль-многообразие оператора состоит из единственного элемента, равного нулю. Отсюда и из известной теоремы Банаха [87, 88] также следует, что оператор имеет обратный и поскольку , то оператор непрерывно обратим в .

Отметим свойство устойчивости решений интегрального уравнения (1.22) с большим ядром. Из теорем 1.5 и 1.6 следует

Теорема 1.7 (устойчивости). *Если непрерывные функции , служащие правыми частями неоднородных линейных интегральных уравнений с оператором , незначительно отличаются друг от друга в смысле выполнения неравенства*

при достаточно малом , то соответствующие им решения этих уравнений представляют собой непрерывные функции и мало отличаются между собой, т. е. удовлетворяют условию

,

где — вполне определенная постоянная.

Доказательство. Так как однородное интегральное уравнение с оператором имеет в соответствии с теоремой 1.5 только тривиальные решения и оператор по теореме 1.6 непрерывно обратим в , то в этом пространстве существует обратный оператор , , с ограниченной нормой и каждая из функций , как образ непрерывного отображения элементов , будет непрерывной. Это свойство отображения доказано в теореме 1.6. Из ограниченного отображения помимо того следует, что

и теорема доказана.

Теоремы 1.3, 1.5, 1.6, впрочем как и предложения 1.2 и 1.4, гарантируют однозначную разрешимость интегрального уравнения (1.22) на , а теоремы 1.4, 1.6 и 1.7, помимо этого, обеспечивают еще и устойчивость его решения, т. е. определяют классическую корректность сформулированной задачи. Остается указать способ отыскания этого решения. В основу способа положим построение “малого” ядра. В связи с этим представим ядро компактного оператора рассматриваемого интегрального уравнения в виде

,

где

— ядро конечного ранга, составленное из линейно независимых на функций , . В качестве возьмем такие функции, чтобы обеспечивалось неравенство

(1.38)

т. е., чтобы ядро было малым. Уравнение (1.22) на основании введенного представления ядра принимает вид

(1.39)

В этом соотношении в отличие от уравнения (1.22) опущены для простоты индексы и вместо обозначений и берутся и соответственно. Выражением

(1.40)

введем новую неизвестную функцию , , и выразим через нее неизвестную плотность . Проще всего это сделать с использованием ряда Неймана для уравнения (1.40), которое при “заданной” функции можно относительно функции рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма второго рода с “малым” ядром компактного интегрального оператора. В результате -е приближение плотности можно выразить через -ое ее приближение так

,

(1.41)

где

,

Введем в рассмотрение многомерную функцию Дирака , действующую на функции класса по правилу

а также “итерированные ядра” по формуле

и запишем на основании соотношения (1.41) выражение искомой плотности через неизвестную функцию в виде ряда

(1.42)

Ряд (1.42) сходится в связи с тем, что ядро удовлетворяет неравенству (1.38).

Подставим полученное выражение плотности в правую часть соотношения (1.39). Ссылаясь при этом на обозначение (1.40), получим для введенной неизвестной функции , , интегральное уравнение

Преобразуем это уравнение с учетом того, что является ядром конечного ранга. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

где обозначено

Таким образом, для определения новой неизвестной функции , , получено линейное интегральное уравнение второго рода

(1.43)

с вырожденным ядром интегрального оператора. Это уравнение эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений. В самом деле, принимая функционалы

за неизвестные компоненты вектора , выражая через эти неизвестные функцию в базисе

(1.44)

и подставляя последнее выражение в уравнение (1.43), получаем

Для функционалов в этом выражении введем следующие обозначения

и перепишем его в более обозримом виде

Поскольку функции , , выбраны изначально линейно независимыми, то выражения при одинаковых функциях должны равняться друг другу в выше

приведенном соотношении, т. е.

Таким образом, задача (1.22) решения линейного интегрального уравнения второго рода с “большим ядром” (1.34) относительно неизвестной плотности , , сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений

(1.45)

с квадратной матрицей и -мерным вектором свободных членов. Решение системы (1.45), если оно существует, дает возможность восстановить по формуле (1.44) функцию , , и, следовательно, решение , , исходного интегрального уравнения (1.22), которое в свою очередь однозначно представляется сходящимся рядом (1.42) функционалов от итерированных “малых ядер” и функции .

Теорема 1.8. *Система линейных алгебраических уравнений , возникающая в задаче определения непрерывной плотности , , возмущающего потенциала (1.21) из линейного интегрального уравнения (1.22) с большим ядром компактного оператора, разрешима однозначно.*

Доказательство. Предположим, что определитель системы (1.45) равен нулю, , и, следовательно, ранг матрицы системы . В этом случае система (1.45) будет иметь линейно независимых решений , , а общее ее решение , как известно [89], будет зависеть от произвольных постоянных , т. е.

где — частное решение системы, обладающее наименьшей нормой и удовлетворяющее условиям , . Поэтому и функция , , определяемая формулой (1.44), будет зависеть от произвольных параметров , значит и плотность , задаваемая рядом (1.42), вопреки утверждению теорем 1.2 или 1.5, была бы неоднозначной функцией. Корректность приведенных рассуждений была бы нарушена, если бы ядро конечного ранга выражалось через линейно зависимые функции , . Но в принятой конструкции такое не допускается. Поэтому предположение о том, что однородная система линейных алгебраических уравнений, отвечающая системе (1.45), имеет отличные от тривиального решения, неверно (что и убеждает в справедливости теоремы).

Перейдем теперь к обоснованию предложенного способа восстановления потенциала притяжения по значениям модуля его градиента при условии, что искомый потенциал близок к заданному нормальному потенциалу притяжения , . Другими словами, покажем, что задача (1.16), сформулированная в виде последовательности внешних линейных граничных задач Неймана для уравнения Лапласа, разрешима однозначно. Метод будет обоснован, если будет доказана сходимость вычисляемых приближений , , к непрерывной ограниченной функции , . В свою очередь сходимость приближений будет определена , если удастся установить сходимость последовательности приближений

возмущающего потенциала , вычисляемых в виде решений последовательности граничных задач (1.20) — (1.21). Действительно, если будет показано, что последовательность сходится к предельной функции , то по определению будет следовать сходимость последовательности к потенциалу притяжения в любой точке неограниченной области . Обозначим через

квадрат отношения модуля градиента возмущающего потенциала к модулю градиента нормального , .

Теорема 1.9. *Если функция пренебрежимо мала по сравнению с функцией , то последовательность решений граничных задач (1.20) — (1.21) сходится к возмущающему потенциалу области .*

Доказательство. Достаточно установить, что сходится последовательность плотностей потенциалов , ибо сходимость последней, как это видно из представления (1.21), влечет за собой сходимость последовательности . А чтобы установить сходимость последовательности воспользуемся утверждением теоремы 1.6 о том, что оператор

каждой из задач (1.22), или, что то же самое, задач (1.20) — (1.21), непрерывно обратим в и, следовательно, ограничен на любом ограниченном подмножестве этого пространства. Это, в свою очередь означает, что существует такая постоянная , что норма обратного оператора к оператору удовлетворяет неравенству для всех конечных приближений . Заметим тут же, что конкретная оценка нормы можем быть при необходимости найдена в зависимости от определенных функционалов над функциями , , и , часть из которых задана непосредственно, а часть вводится в связи с реализацией решения интегрального уравнения (1.22) с большим ядром. В данном рассмотрении конкретная оценка нормы нас не интересует. Достаточно предположить, что она существует и записать на этом основании следующее очевидное неравенство

, (1.46)

которое с учетом определения функции в виде (1.24) можно переписать

,

где для простоты индекс нормы опущен.

В рассматриваемой оценке приближения модуля градиента потенциала

притяжения определяются выражением (1.17), в котором на первых порах будем различать приближение модуля, вычисленное на -ом шаге процесса непосредственно по формуле (1.17) и стоящее слева равенства и приближение , вычисляемое по формуле

(1.47)

при определении на предыдущем -ом шаге приближения

(1.48)

направляющего косинуса и определяющее наряду с другими величинами подкоренное выражение справа равенства (1.17). Первое приближение в отличие от второго обозначим через и в соответствии с этим соглашением перепишем предыдущее неравенство в виде

(1.49)

и подвергнем его исследованию.

Покажем прежде всего, что первым слагаемым в правой части этого неравенства можно пренебречь как величиной порядка В соответствии с определениями (1.23) и (1.48) имеем

.

Далее, из выражения (1.47) легко находим, что

(1.50)

где

и, помимо этого,

На основании полученных соотношений находим, что

(1.51)

Отсюда с учетом не требующего пояснения сравнения

окончательно получаем требуемый результат

(1.52)

Перейдем теперь к оценке разности и начнем с установления зависимости между приближениями и . Из представления (1.17) имеем

А так как, очевидно,

,

то

.

Попутно заметим, что входящая в приведенное выражение величина

является отношением проекции центробежной силы на нормаль к эквипотенциальной поверхности в точке к нормальной силе притяжения в этой же точке. Из полученного выражения определяем с одной стороны, что

,

(1.53)

а с другой, что

,

(1.54)

Теперь, ссылаясь на представление (1.53), не составляет труда вычислить разность

Принимая во внимание зависимость (1.54) между приближениями и ,
рассматриваемую разность перепишем следующим образом

(1.55)

Таким образом, неравенство (1.46) с учетом условия теоремы и выражений (1.49), (1.52) и (1.55) можно представить в виде цепочки индуктивных неравенств

,

что на основании зависимости (1.51) можно переписать так

Следовательно, последовательность довольно быстро сходится в себе (по метрике), если . В то же время, когда , т.е. когда направление внутренней нормали к эквипотенциальной поверхности совпадает (или ему противоположно) с направлением нормали к поверхности в точке , тогда наша задача сводится к хорошо изученной задаче Неймана для уравнения Лапласа и, естественно, может быть решена при помощи классической процедуры. Исключая этот случай из рассмотрения (как не интересный и практически нереальный в данной ситуации) и возвращаясь к последовательности заметим, наконец, что из сходимости в себе элементарно следует ее сходимость к единственному пределу , однозначно по формуле типа (1.21) определяющему возмущающий потенциал , следовательно, и искомый потенциал притяжения . Этим замечанием завершается доказательство теоремы.

Замечание. Доказательство теоремы не изменится, если не различать функции и в формуле (1.17) для приближений модуля градиента потенциала притяжения, поскольку одно из них нельзя считать “строго динамическим”, а другое — “строго статическим”. В самом деле, если хотя бы одно из приближений , , (а не все) получено по формуле (1.17), а последующие по формуле (1.47), то на основании представления (1.50) сразу же находим

Отсюда с учетом представления (1.46) убеждаемся в справедливости сформулированной теоремы.

1.6. Вычисление аномальных высот. Разработанный в п.п. 1.4 — 5 способ восстановления потенциала притяжения можно использовать в теории фигуры Земли при вычислении аномальных высот, определяемых равенством

.

Здесь под возмущающим потенциалом подразумевается гармоническая функция , представляющая собой разность разность потенциала силы тяжести и нормального потенциала , включающего в себя потенциал центробежной силы . Аномалия высоты есть не что иное, как расстояние вдоль силовой линии нормального поля между неизвестной реальной поверхностью Земли и заданной ее гипсометрической поверхностью . Точки и , расстояние между которыми равно и, следовательно, расположенные на одной и той же силовой линии нормального поля, будем называть *соответствующими* друг другу. Аномалию высоты будем считать функцией точки . Саму же гипсометрическую поверхность определим при помощи нормальных высот , отсчитываемых от некоторого базисного эллипсоида.

Обозначим часть евклидова пространства , ограниченную гипсометрической поверхностью и содержащую бесконечно удаленную точку, через . Для того чтобы сформулировать граничную задачу для определения неизвестной функции , , или, что то же самое, гармонической функции , , в предположении, что в точках неизвестной поверхности заданы значения

,

запишем для этих точек значение нормальной производной

где через , и , по-прежнему, обозначены внутренние по отношению к единичные нормали к поверхностям , и соответственно, которые пересекаются в точке . Так как положение точки не известно, то в приведенном выражении определенным (по данным измерений) является только значение функции . Предполагая априори, как это принято в теории фигуры Земли, что аномалии высот настолько малы, что их квадратами можно пренебречь, приведенное выражение для нормальной производной можно переписать для соответствующей точки в виде

,

поскольку производные от в направлениях, ортогональных нормали ,

чрезвычайно малы. Заменяя в данном равенстве аномалию высоты через функции, ее определяющие, получим для определения гармонической функции , , граничные условию в виде

,

(1.56)

где

В граничном условии (1.56) не определен , поэтому задачу отыскания возмущающего потенциала будем рассматривать в рамках разработанного способа построения последовательности приближений искомой функции . Основанием к тому служит то обстоятельство, что граничное условие (1.56) рассматриваемой задачи получено с точностью до , которое заведомо обеспечивается, если выполняется требование теоремы 1.9.

При решении задачи помимо функций , , и , , будем считать заданными нормали и в любой точке гипсометрической поверхности , а также величину . Предположим, что -е приближения , , … , возмущающего потенциала уже построены в результате решения последовательности граничных задач.

, ,

(1.57)

при ,

где

.

Последующее -е приближение вычисляется так. Вначале определяются приближения направляющих косинусов , внутренней (по отношению к) нормали к эквипотенциальной поверхности и находится величина

.

Вычисляется -е приближение граничной функции

и составляется для -го приближения плотности , , в соответствии с граничным условием задачи (1.57) линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

, ,

(1.58)

с ядром

(1.59)

После решения этого уравнения вычисляются приближения

,

и следующее -е приближение направляющих косинусов нормали

и т. д. и т. п. Определив возмущающий потенциал в виде предела последовательности , вычислим по формуле Брунса и само значение аномалии высоты .

Для вычисления остается показать, что последовательность решений граничных задач (1.57) сходится при определенных условиях к возмущающему потенциалу. Попутно нужно убедиться также в однозначной разрешимости интегрального уравнения (1.58).

Теорема 1.10 (единственности). *Если гипсометрическая поверхность является множеством Ляпунова, то однородное интегральное уравнение*

,

(1.60)

соответствующее уравнению (1.58), имеет только тривиальное решение.

Для доказательства теоремы рассмотрим потенциал простого слоя , распространенного по поверхности с плотностью , которая удовлетворяет уравнению (1.60). Потенциал как гармоническая в функция принимает в бесконечно удаленной точке значение и непрерывен на границе . С другой стороны, так как его плотность удовлетворяет на уравнению (1.60), то при стремлении точки к точке изнутри области будем иметь

.

Это возможно при одновременном равенстве при и

при .

В самом деле, если бы это было не так, то мы пришли бы к противоречию. Оно заключалось бы в том, что непрерывная при переходе точки через поверхность функция , определенная в то же время равенством

,

должна была бы быть разрывной (вместе со своей нормальной производной). Далее, функция , как потенциал простого слоя, гармонична и в дополнении области . А так как ее след на границе равен нулю, то и во всей области она равна нулю. Поэтому справедливо равенство

при стремлении изнутри области . Отсюда по теореме о скачке плотности нормальной производной потенциала простого слоя имеем

Таким образом, однородное интегральное уравнение (1.60) имеет только тривиальное решение, если — поверхность Ляпунова. Поэтому соответствующие ему неоднородные уравнения всегда однозначно разрешимо при любой (ограниченной) правой части.

Теорема 1.11 (существования). *Если функция , заданная на многообразии Ляпунова , принадлежит ограниченному множеству некоторого банахова пространства, то решение , , интегрального уравнения с правой частью существует в виде предельной функции последовательности , генерируемой процессом последовательных приближений*

,

, .

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что

.

В связи с этим оценим модуль функции в выражении (1.59) ядра оператора интегрального уравнения (1.58), исходя из аппроксимации гравитационного поля Земли полем шара с массой , равной массе Земли. Будем иметь

.

Обозначим через наименьшее из чисел , когда точка пробегает поверхность . Тогда, нетрудно при помощи непосредственных вычислений установить, что

.

Отсюда заключаем, что последовательность сходится (по индексу) к функции , причем

,

(1.61)

где

.

Теорема 1.12. *Если модуль градиента возмущающего потенциала удовлетворяет условию*

при *и* *, то последовательность решений* *граничных задач (1.57) сходится к возмущающему потенциалу* *области* .

Для доказательства теоремы достаточно показать, что сходится последовательность , так как сходимость последней влечет за собой сходимость последовательности . Обозначим через верхнюю грань выражения

при и . По условию теоремы . Из неравенства (1.61), очевидно, получим

.

Нетрудно показать, что с точностью до малой величины

аномалии силы тяжести

, ,

определяются соотношением

.

Поэтому из предыдущего неравенства с учетом сделанного замечания легко приходим к цепочке неравенств

,

из которой немедленно следует сходимость в себе последовательности . Завершение доказательства теоремы элементарно.

2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ЗАДАННЫМ

В данной главе исследуются обратные задачи определения области звездных тел из класса ограниченных, близких к кругу, и из класса неограниченных, близких к слою постоянной толщины. Каждая из сформулированных задач сведена к отысканию функции, описывающей отклонение контура возмущающего тела от контура заданного. Эта функция находится в виде последовательности приближений, каждая из которых является решением определенной последовательности линейных интегральных уравнений первого рода.

2.1. Постановка задач определения формы некоторых тел, близких к заданным. Зададимся целью определить по заданным на бесконечной прямой значениям логарифмического потенциала

, , ,

контур притягивающей области при дополнительном условии, что заданные на прямой значения потенциала мало (в смысле определенной метрики) отличаются от значений потенциала круга радиуса с центром в точке , заполненного массой той же (постоянной) плотности , с которой распределена масса по области . Здесь — гравитационная постоянная.

Для удобства описания ось декартовой прямоугольной системы координат направим вдоль прямой , а ось — в сторону возмущающего тела так, чтобы она проходила через центр круга. Тогда центр круга расположится в точке , ось совпадет с прямой =0, а радиус круга будет удовлетворять (по предположению) неравенству .

Следует ожидать, что при малом отклонении внешних потенциалов и областей и , заполненных массой одной и той же плотности , искомое тело будет мало отличаться как по своим размерам, так и по своему местоположению от аппроксимирующего круга . Поэтому область будет звездной по отношению к центру круга .

Запишем выражение для потенциала , =0, с учетом того, что область близка к кругу , вводя мимоходом обозначение . Описываемую ситуацию удобнее всего рассматривать в полярной системе координат с полюсом в центре круга и отсчетом углов против часовой стрелки от полярного радиуса, совпадающего по направлению с осью . Тогда

и границу области можно представить в виде
где функция однозначна как функция, описывающая контур звездного тела. В связи с этим выражение для потенциала можно переписать так

(2.1)

где

Выражение удается привести к аналитическому виду (без использования интегралов) при помощи интегрирования по частям и последующего выделения рациональных выражений, которые в свою очередь легко преобразуются к каноническим интегралам. В результате будем иметь

2.1.1. Преобразование подынтегральной функции. Намереваясь получить выражение для определения границы тела , близкого к кругу , разобьем интервал интегрирования по переменной на два подынтервала с учетом величины радиуса круга

и в соответствии с этим разбиением представим подынтегральную функцию после подстановки выделенных пределов интегрирования в виде суммы двух слагаемых

где

(2.2)

(2.3)

Ясно, что первое из выделенных слагаемых подынтегральной функции, а именно, выражение (2.2), — после интегрирования по переменной дает потенциал круга , а второе — потенциал "избыточного" по отношению к этому кругу тела . Для аналитического вычисления интеграла от функции (2.2) понадобится

Лемма 1. *Справедливо разложение*

и представляющий функцию ряд сходится равномерно относительно параметра из промежутка .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из полученного в ходе доказательства леммы 2 из работы [11] соотношения следует разложение

(2.4)

в равномерно сходящийся ряд. Нетрудно видеть, что порождающая ряд функция является дифференциалом (по переменной) первообразной В самом деле, легкое преобразование этой функции приводит к виду

и, следовательно

Отсюда следует справедливость высказанного предложения. Действительно, полученное разложение можно интегрировать по параметру , поскольку представляющий его ряд сходится абсолютно.

Теперь на основании леммы 1 из работы [11] и только что доказанного утверждения без затруднений получаем, что

(2.5)

Займемся теперь преобразованием функции направленным на получение удобного в вычислительном плане уравнения для определения функции , , характеризующей флуктуации границы тела относительно границы круга . Для того чтобы осуществить это преобразование используем следующие элементарные утверждения.

Лемма 2. *Имеет место разложение в ряд функции*

а репрезентующий функцию ряд сходится равномерно относительно параметра из промежутка .

Лемма 3. *Справедливо разложение*

причем представляющий функцию ряд сходится равномерно относительно параметра из промежутка .

Д о к а з а т е л ь с т в о этих утверждений проводится по аналогии установления справедливости леммы 1 из работы [11] и леммы 1 соответственно. Далее, в выражении (2.3) перейдем от переменных к новым переменным по формулам

(2.6)

Попутно отметим, что законность введения переменной по приведенным формулам следует из тождества

И так как

то выражение (2.3) в переменных (2.6) будет выглядеть так

где для упрощения записи положено На основании лемм 2 и 3 будем иметь

(2.7)

Для последующего упрощения выражения (2.7) понадобится

Лемма 4. *Имеет место формула*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по . Для имеем

а для —

Но из формул (2.6) следует, что

и, следовательно,

Поэтому окончательно имеем

Далее полагая, что формула справедлива для , определим ее для .
Будем иметь

т.е. формула для индекса имеет тот же вид, что и для индекса . А т.к. она справедлива для , то, следовательно, она верна и для любого положительного числа .
Воспользуемся полученным только что результатом и перепишем выражение (2.7) в виде

Если принять по соглашению, что при

то окончательно будем иметь

(2.8)

где

Таким образом доказана следующая

Теорема 2.1. *Если возмущающая область мало уклоняется от круга в смысле выполнения условия*

где , ,

, *, то подынтегральная функция*

определяющая вариацию потенциала

разлагается в абсолютно сходящийся ряд

.

2.1.2. Интегральное уравнение задачи. В результате проведенного анализа

нелинейного по отношению к функции интегрального уравнения приходим к следующему нелинейному для функции , , соотношению

(2.9)

где

 — потенциал тела , — потенциал круга , определяемый формулой (2.5), — функция, заданная выражением (2.8).

Соотношение (2.9) можно рассматривать в качестве линейного интегрального уравнения первого рода для определения приближений , контура тела в виде функции , , характеризующей уклонение контура от окружности радиуса , , если положить

(2.10)

В дальнейшем приведенное соотношение будем называть интегральным уравнением для определения контура тела, близкого к кругу. Ясно , что для определения контура тела, т.е. последовательности , нужно при каждый раз вычислять функцию . Выражение (2.8), очевидно, для этого плохо приспособлено. К счастью функция, к которой сходится ряд (2.8), легко восстанавливается по исходному выражению (2.3) в виде

(2.11)

и вычисление значений этой функции для каждого приближения не составит большого труда.

Суммируя сказанное, уточним постановку задачи. Задача определения контура однородного финитного источника по форме близкого к кругу по значениям логарифмического потенциала ставится следующим образом. Требуется найти однозначную функцию , , характеризующую уклонение границы однородного финитного источника от окружности и определяющую контур источника , по логарифмическому потенциалу области , заданному своими значениями вне области на бесконечной прямой, при

условии, что потенциал незначительно (в определенном смысле) отличается от потенциала круга и плотность распределения тяготеющих масс по области известна. В данной постановке отыскание функции осуществляется в виде предела последовательности , которая генерируется процессом приближений (2.10). Подлежат исследованию вопросы разрешимости уравнения (2.10) при фиксированном индексе и сходимости последовательности при . При изучении этих вопросов могут возникнуть некоторые затруднения, связанные с тем, что внешний логарифмический потенциал финитного источника неограниченно убывает в соответствии с представлением

(2.12)

где — масса тела, а

—

функция, гармоническая вне области и убывающая к нулю на бесконечности.

2.1.3. Последовательные приближения контура тела, близкого к слою постоянной толщины. Переходя к построению простейшей модели математической обратной задачи для тела постоянной плотности, близкого к неограниченному слою постоянной толщины и той же плотности, прежде всего отметим, что такую модель непосредственно для логарифмического потенциала построить невозможно из-за расходимости интеграла, представляющего этот потенциал. В сказанном легко убедиться на основании представления (2.12), а также при помощи соответствующих вычислений. Поэтому модель будем строить для какой-нибудь из составляющих притяжения логарифмического потенциала.

Предположим, что на бесконечной прямой , вдоль которой направим ось декартовой прямоугольной системы координат , а ось — к тяготеющим массам, заданы составляющие

(2.13)

логарифмического потенциала тела постоянной (заранее известной) плотности . Обозначим

(2.14)

и в дальнейшем будем иногда называть — “горизонтальной”, а — “вертикальной” составляющими потенциала притяжения. Поставим перед собой задачу определить форму (границу) неограниченной типа слоя однородной области по значениям одной из составляющих , , потенциала притяжения, если известно, что заданные на прямой значения , мало отличаются (в смысле определенной метрики) от значений составляющих притяжения слоя постоянной толщины , заполненного массой той же самой плотности , с которой распределена масса по области и которая считается заданной. Следует ожидать, что при малом отклонении составляющих и , , притяжения

областей и , заполненных массой одной и той же плотности, искомое тело будет мало отличаться от аппроксимирующего слоя и границы этих тел будут также незначительно уклоняться друг от друга. Не ограничивая общности будем считать, что “нижняя” граница слоя совпадает с прямой , а “верхняя” — с прямой . Будем также считать известным положение одной из двух бесконечных ветвей и границы слоя . Пусть это будет ветвь и пусть она совпадает с прямой . Тогда уклонение границы слоя от верхней границы слоя можно охарактеризовать однозначной функцией , . Это вытекает из звездности (по отношению к бесконечно удаленной точке) области и близости к ней области , которая, следовательно, оказывается также звездной.

Степень близости звездных областей и определим неравенством

(2.15)

а саму область зададим в виде множества

(2.16)

где

Выразим теперь составляющие напряженности потенциала через неизвестную функцию . Для определенности ограничимся рассмотрением случая для вертикальной составляющей напряженности поля. На основании представления (2.16) из выражения (2.13) с учетом калибровки (2.14) немедленно получим

Разбивая интервал интегрирования по переменной на два

и, учитывая, что на нижнем пределе первого интервала интеграл, вообще говоря, расходится и, следовательно, понимается в смысле главного значения, после очевидных и не очень сложных преобразований найдем

(2.17)

для точек полуплоскости , ограниченной прямой и

для точек полуплоскости , ограниченной кривой . В объединении функция , очевидно, является гармонической, причем при по любому направлению в она стремится к пределу , а в — к пределу .

Ограничиваясь рассмотрением на прямой предельной зависимости между напряженностью поля и значениями возмущающей его функции , придем от соотношения (2.17) к следующему интегральному уравнению для определения функции

(2.18)

где , , . Отметим тут же, что решение уравнения (2.18), если оно существует, определяет верхнюю границу слоя в виде отклонения этой границы от слоя постоянной толщины. Поэтому функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В гравиметрии задача определения верхней границы слоя называется обычно задачей для контактной поверхности или структурной задачей. В отличие от рассматриваемого в традиционном подходе граница отыскивается в виде и поэтому в силу условия (2.15) всегда (при указанной ориентации системы координат).

2.1.4. Преобразование интегрального уравнения в связи с условием (2.15). Условие близости возмущающих областей и дает возможность представить подынтегральную функцию в виде следующего абсолютно сходящегося ряда

(2.19)

В самом деле, по отношению к вариации области подынтегральная функция представляет собой приращение функции , обусловленное этой вариацией. Разлагая это приращение в ряд Тейлора, приходим к выписанному соотношению (2.19). Остается доказать абсолютную сходимость ряда при выполнении условия (2.15). Для этого понадобится

Лемма 5. *Для любого целого положительного числа справедливы представления*

Действительно для функции

последовательным дифференцированием при непосредственно получаем

Индукцией по индексу дифференцирования, полагая, что для фиксированного (четного) числа имеет место формула

(2.20)

для следующего нечетного числа находим

(2.21)

что и ожидалось. Для завершения доказательства остается заметить, что при очевидных преобразованиях формул (2.20) и (2.21) будем иметь

На основании леммы легко доказывается утверждение, высказанное вначале подраздела, а именно

Теорема 2.2. *Ряд* *при выполнении условия* *абсолютно сходится к предельной сумме*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого значения (четного или нечетного) получаем, ссылаясь на лемму 5, следующую оценку

Теперь для доказательства абсолютной сходимости ряда (2.19) достаточно убедиться в сходимости мажорирующего ряда

А это в свою очередь легко устанавливается по признаку Даламбера. Для завершения доказательства следует подчеркнуть, что предельной суммой ряда является производящая его функция.

Подводя итоги проведенным рассмотрениям, можем переписать нелинейное интегральное уравнение (2.18) в виде следующего нелинейного же соотношения для функции

(2.22)

где

Точно также, как соотношение (2.9) в случае ограниченного звездного тела, соотношение (2.22) для тела типа слоя можно рассматривать в качестве линейного интегрального уравнения первого рода для определения приближений контура тела в виде функции , , характеризующей уклонение ветви границы слоя от прямой если положить

(2.23)

В дальнейшем приведенное соотношение будем называть интегральным уравнением для контактной поверхности, близкой к кровле слоя постоянной толщины. Для определения

контура тела, т.е. последовательности нужно при каждый раз вычислять функцию Выражение ее в виде ряда для этого мало приспособлено. Поэтому вычислять ее стоит в виде

(2.24)

Итак, задача определения контура однородного неограниченного источника, близкого по форме к слою постоянной толщины, по значениям вертикальной производной логарифмического потенциала ставится так. Требуется найти однозначную функцию , , характеризующую уклонение границы однородного неограниченного типа слоя источника от прямой и определяющую границу источника по значениям вертикальной производной логарифмического потенциала, заданным вне области на бесконечной прямой при условии, что значения производной незначительно (в определенном смысле) отличаются от значений производной полосы и плотность распределения масс по области известна. В данной постановке отыскание функции осуществляется в виде предела последовательности , вырабатываемой процессом приближений (2.23). Ясно, что насущными становятся вопросы разрешимости уравнения (2.23) при фиксированном индексе и сходимости последовательности при .

2.2. Последовательности линейных интегральных уравнений для восстановления звездных областей. В предыдущем пункте и в работах [8, 11] сформулированы обратные задачи определения области звездных тел из класса ограниченных, близких к кругу, и из класса неограниченных, близких к слою постоянной толщины. Каждая из задач сведена к решению соответствующего функционального уравнения, содержащего бесконечные ряды относительно функции, описывающей пертурбации контура возмущающего тела от контура заданного тела. Здесь же задачи переформулируются к отысканию приближений этой функции в виде решений определенной последовательности линейных интегральных уравнений первого рода.

Пусть по заданным на бесконечной прямой значениям логарифмического потенциала

требуется определить контур притягивающей области при дополнительном условии, что значения потенциала на прямой мало отличаются от значений потенциала круга радиуса с центром в точке , заполненного массой той же (постоянной) плотности , с которой распределена масса по области . При малом отклонении внешних потенциалов и , искомое тело будет мало отличаться от аппроксимирующего круга и поэтому область будет звездной по отношению к центру круга. Для определенности ось прямоугольной системы направим вдоль прямой , ось — в сторону возмущающего тела так, чтобы она проходила через центр круга , тогда и (по предположению) .

Запишем выражение для в полярной системе координат

с учетом близости областей и и того, что границу звездной области можно

представить однозначной функцией в виде . Будем иметь

где

Разбивая с учетом величины радиуса круга интервал интегрирования по переменной на два подынтервала, представим подынтегральную функцию в виде двух слагаемых

первое из которых после интегрирования по даст, очевидно, потенциал круга , а второе — потенциал «избыточного» по отношению к кругу тела . Сосредоточим на время внимание на преобразовании функции

(2.25)

Отправляясь от разложений

в равномерно сходящиеся при ряды и представления

где

нетрудно доказать следующее предложение.

Теорема 2.3. *Если возмущающая область* *мало уклоняется от круга* *в смысле выполнения условия*

где *то подынтегральная функция*

определяющая вариацию потенциала

разлагается в абсолютно сходящийся ряд

На основании этой теоремы поиск функции осуществляется при помощи ее последовательных приближений , которые определяются в виде решений последовательности линейных интегральных уравнений первого рода

где функция

легко вычисляется с учетом выражения (2.25).

В работе [8] построена простейшая модель обратной задачи для неограниченного звездного тела постоянной плотности , близкого к слою постоянной толщины и той же плотности, которая для вертикальной составляющей логарифмического потенциала сводится к нелинейному интегральному уравнению вида

(2.26)

где . Неизвестную однозначную функцию , характеризующую собой уклонение «верхней» границы возмущающего слоя от границы заданного слоя постоянной толщины, можно искать в виде последовательных приближений, организованных по аналогии с поиском границы конечного тела.

Условие близости слоев дает возможность представить подынтегральную функцию выражения (2.26) в виде

(2.27)

Действительно, так как подынтегральная функция представляет собой приращение функции , вызванное флуктуацией границы возмущающего слоя,

то, разлагая это приращение в ряд Тейлора, придем к соотношению (2.27).

Теорема 2.4. *Ряд справа в выражении (2.27) при выполнении условия близости возмущающих областей* , *абсолютно сходится к своей предельной сумме слева в выражении (2.27).*

В самом деле, поскольку

то имеет место неравенство

Отсюда с учетом условия теоремы нетрудно установить равномерную сходимость ряда к предельной сумме, которая является производящей его функцией.

Таким образом, на основании теоремы 2.4 выражение (2.26) можно переписать в виде

и для генерирования последовательности приближений функции можно предложить процесс отыскания решений последовательности линейных интегральных уравнений первого рода

2.3. О характеристических свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения областей. **В предыдущем пункте и в работах [14, 17] задачи определения звездных областей из класса ограниченных, близких к кругу, и из класса неограниченных, близких к слою постоянной толщины, сведены к решению соответствующих последовательностей линейных интегральных уравнений первого рода. При этом контур , , возмущающей области определяется в виде предела последовательности этих решений. Каждое из приближений вычисляется при помощи интегрального оператора , задаваемого равенствами**

(2.28)

(2.29)

при поиске ограниченных (если) и неограниченных (если) контуров. В предлагаемой заметке излагаются характеристические свойства этих операторов, действующих в пространствах непрерывных функций , Лебега и Гильберта .

Теорема 2.5. *Если контур , , возмущающего тела мало уклоняется от окружности радиуса , то линейный интегральный оператор , заданный равенством (2.28), является ограниченным, непрерывным и компактным оператором из в , из в .*

Следствие. *Оператор задачи определения контура является линейным вполне непрерывным оператором из в .*

Теорема 2.6. *Если контакт , , двух однородных слоев с разностью плотностей незначительно уклоняется от слоя толщины и той же плотности , то линейный интегральный оператор , заданный равенством (2.29) является ограниченным, непрерывным и компактным из в , а также из в , .*

Обозначим через область значений оператора и сформулируем следующее предложение.

Теорема 2.7. *Область значений каждого из операторов , заданных соответственно равенствами (2.28) или (2.29), являются множествами первой категории как объединения компактных множеств и всюду плотны в .*

Более подробный анализ структуры компактных операторов (2.28) и (2.29) в гильбертовом пространстве начнем с замечания о ядрах этих операторов и характере их действия в пространствах суммируемых функций и , связанных соотношением . Функция оператора (2.28) при естественных ограничениях на параметры , и функцию , обусловленных размерами искомого тела и внешней окружности радиуса , на которой задано поле от этого тела, по совокупности «угловых» переменных в основном квадрате , непрерывна и симметрична. Точно также и функция оператора (2.29) при непрерывна и формально симметрична по переменным , . В связи с этим каждому из линейных операторов можно поставить в соответствие сопряженный линейный оператор , который также будет ограниченным, непрерывным и компактным при отображении в . Чрезвычайно важным является то обстоятельство, что при операторы и действуют в одном и том же гильбертовом (вещественном) пространстве , причем в силу формальной симметрии ядер операторы совпадают друг с другом, , т. е. операторы (2.28) и (2.29) в соответствующих гильбертовых пространствах будут самосопряженными.

Для отыскания собственных функций и собственных значений самосопряженного в компактного оператора (2.28) воспользуемся леммой 2 из работы [14] и получим разложение ядра

(2.30)

в абсолютно сходящийся ряд. Отсюда следует

Теорема 2.8. *Последовательности*

образуют полную систему собственных чисел и соответствующих им собственных функций непрерывного симметричного ядра самосопряженного оператора (2.28).

Следствие 1. *Линейное по отношению к приближению интегральное уравнение определения области [17] является уравнением Фредгольма первого рода.*

Следствие 2. *Спектр самосопряженного оператора (2.28) дискретен и вполне определяется счетным числом значений , причем границы его принадлежат отрезку , где*

Следствие 3. *Нуль-многообразие самосопряженного оператора (2.28), т. е. собственное подпространство пространства , отвечающее нулевому собственному значению оператора, является множеством второй категории.*

Следствие 4. *Области определения операторов и* суть , *, причем*

Отсюда вытекает, что самосопряженный оператор (2.28) устанавливает взаимно однозначное соответствие между подпространствами и , имеющими мощность первой категории, и, следовательно, непрерывно обратим он только на подпространстве пространства . В связи с этим проблема выделения в подмножеств и становится первостепенной. Однако, критерий принадлежности функции из множеству , как указано в следствиях 3 и 4, имеет вид бесконечного числа соотношений и не может считаться эффективным. Поэтому остается единственная возможность «распознавания» элементов множества при помощи различных процедур «сглаживания», сводящихся собственно к построению средних функций по Стеклову. Что же касается подмножества , рассматриваемого как область определения нормальных решений уравнения (2.28), то для его распознавания необходимо ввести дополнительные критерии, тесно связанные с его внутренней структурой. В качестве отличительных особенностей можно избрать

равномерную в среднем ограниченность его подмножеств и их равностепенную в среднем непрерывность. Признак равностепенной непрерывности можно, оказывается, заменить эквивалентным ему и эффективно проверяемым признаком равномерной ограниченности первых производных функций этого множества. Таким образом область определения нормальных решений уравнений (2.28) может быть задана множеством

где

Переходя к спектральному анализу самосопряженного оператора (2.29), сразу же обнаруживаем только частичную схожесть его характеристик со свойствами оператора (2.28), обусловленную, очевидно, тем, что операторы (2.28) и (2.29) действуют в различных пространствах: первый в , а второй в .

Теорема 2.9. *Линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор задачи (2.29), действующий в гильбертовом пространстве , имеет на непрерывный спектр и соответствующие ему обобщенные собственные функции Числа являются собственными числами оператора, причем числу отвечает собственная функция , а числу — подпространство пространства , представляющее собой замкнутое нуль-многообразие оператора уравнения (2.29).*

Следствие 1. *Линейное по отношению к приближению интегральное уравнение определения области [17] является интегральным уравнением Фредгольма первого рода.*

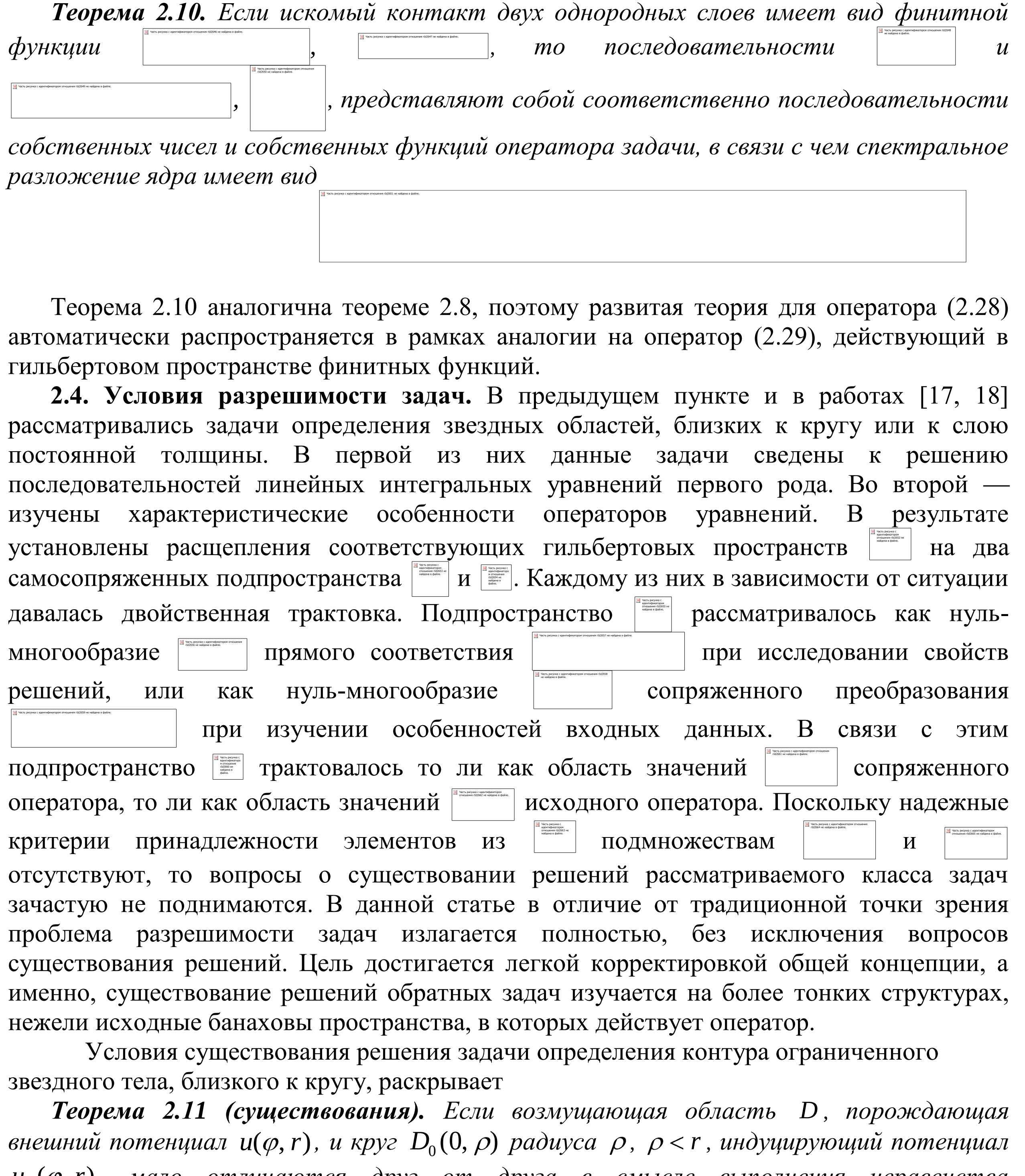
Следствие 2. *Области определения операторов и , действующих в , представляются соответственно в виде причем в силу самосопряженности оператора эти теоретико-множественные равенства отождествляются с расщеплением где и*

Отсюда, как и в случае операторного уравнения (2.28), заключаем, что эффективный критерий принадлежности функции из множеству отсутствует, так как он имеет вид бесконечного числа соотношений, определяющих ортогональность функции нуль-многообразию . Так же, как и в предыдущем случае, для определения контакта приходится правую часть уравнения (2.29) выбирать при помощи определенных процедур «сглаживания». Точно так же из-за невозможности эффективного использования свойства ортогональности функции множеству область определения нормальных решений задачи отыскания контакта по значениям индуцированного поля задается в виде

где

В заключение отметим еще одно предложение.

Теорема 2.10. *Если искомый контакт двух однородных слоев имеет вид финитной функции* , , *то последовательности* и , , *представляют собой соответственно последовательности собственных чисел и собственных функций оператора задачи, в связи с чем спектральное разложение ядра имеет вид*



Теорема 2.10 аналогична теореме 2.8, поэтому развитая теория для оператора (2.28) автоматически распространяется в рамках аналогии на оператор (2.29), действующий в гильбертовом пространстве финитных функций.

2.4. Условия разрешимости задач. В предыдущем пункте и в работах [17, 18] рассматривались задачи определения звездных областей, близких к кругу или к слою постоянной толщины. В первой из них данные задачи сведены к решению последовательностей линейных интегральных уравнений первого рода. Во второй — изучены характеристические особенности операторов уравнений. В результате установлены расщепления соответствующих гильбертовых пространств на два самосопряженных подпространства и . Каждому из них в зависимости от ситуации давалась двойственная трактовка. Подпространство рассматривалось как нуль-многообразие прямого соответствия при исследовании свойств решений, или как нуль-многообразие сопряженного преобразования при изучении особенностей входных данных. В связи с этим подпространство трактовалось то ли как область значений сопряженного оператора, то ли как область значений исходного оператора. Поскольку надежные критерии принадлежности элементов из подмножествам и отсутствуют, то вопросы о существовании решений рассматриваемого класса задач зачастую не поднимаются. В данной статье в отличие от традиционной точки зрения проблема разрешимости задач излагается полностью, без исключения вопросов существования решений. Цель достигается легкой корректировкой общей концепции, а именно, существование решений обратных задач изучается на более тонких структурах, нежели исходные банаховы пространства, в которых действует оператор.

Условия существования решения задачи определения контура ограниченного звездного тела, близкого к кругу, раскрывает

Теорема 2.11 (существования). *Если возмущающая область* D, *порождающая внешний потенциал* $u(\varphi, r)$, *и круг* $D_0(0, \rho)$ *радиуса* ρ, $\rho < r$, *индуцирующий потенциал* $u_k(\varphi, r)$, *мало отличаются друг от друга в смысле выполнения неравенства* $\max|\zeta(\alpha)| < \min R(\psi, \rho, r)$, $0 \le \alpha, \quad \psi \le 2\pi$, *где* $\zeta(\alpha) + \rho = \rho(\alpha)$ *— однозначная функция, описывающая конфигурацию границы* ∂D *области* D, *а функция* $R(\psi, \rho, r) = (r^2 - 2\rho r\cos\psi + \rho^2)^{1/2}$, $\psi = \alpha - \varphi$, *то последовательность приближений* $\{\zeta_n(\alpha)\}$, *генерируемая процессом*

$$\int_0^{2\pi} k(\alpha, \varphi, \nu)\zeta_n(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\rho}\left\{u(\varphi, r) - u_k(\varphi, r) - \int_0^{2\pi} f(\psi, \zeta_{n-1}, \nu)d\alpha\right\}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \infty; \; \zeta_0(\alpha) = 0,$$

$k(\alpha, \varphi, \nu) = -\ln R(\psi, \rho, r)$, *сходится (в метрике* $C[0, 2\pi]$*) к функции* $\zeta(\alpha)$, *т. е. к решению нелинейного интегрального уравнения*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho(\alpha)} \ln\frac{1}{\sqrt{r^2-2\rho r\cos\psi+\rho^2}}\rho d\rho d\alpha = u(\varphi, r)$$

при условии, что каждое из приближений $\zeta_n(\alpha)$ принадлежит компактному множеству [18]

$$V_0^{(1)}(A^*) = \{\zeta:\quad \zeta^{(k)} \in L^{(2)}[0, 2\pi];\quad \zeta^{(k)}(\alpha+2\pi) = \zeta^{(k)}(\alpha);\quad \left\|\zeta^{(k)}\right\|_2 \le c^{(k)}, k = 0, 1\},$$

$$c^{(0)} = \pi\sqrt{2c+(2\ln r)^2}\|u\|_2;\quad c^{(1)} = \pi\sqrt{2c}\|u\|_2;\quad c = \frac{r^2}{r^2-\rho^2},$$

и что выполняется неравенство

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\left|\ln(1-\dfrac{\mu\nu}{1-\nu})\right|}{\left|\ln(1+\dfrac{\mu\nu}{1-\nu})\right|} < 2,\quad \text{где}\ \ \mu = \rho^{-1}\max|\zeta(\alpha)| \quad \text{и} \quad \nu = r^{-1}\rho.$$

Условия существования решения задачи определения контакта двух разнородных неограниченных слоев можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2.12 (существования). *Если слой $D = \{<x, y>:\quad -\infty < x < \infty;\quad 0 \le y \le h(x)\}$ переменной толщины $h(x) = h + \zeta(x)$, $x \in R^{(1)}$, порождающий поле $u_2(x)$, и слой $D_C(h) = \{<x, y>:\quad x \in R^{(1)};\quad 0 \le y \le h\}$ постоянной толщины $h = const$, индуцирующий поле $u_{C,2}(x) = h$, мало уклоняются друг от друга в смысле выполнения требования $|\zeta(x)| < h$, где $\zeta(x)$ — однозначная функция, описывающая конфигурацию «верхней» части границы ∂D слоя D, то последовательность приближений $\{\zeta_n(x)\}$, генерируемая процессом*

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x, \xi; h)\zeta_n(\xi)d\xi = u_2(x) - h - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi; \zeta_{n-1}, h)d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ \zeta_0(x) = u_2(x) - h,$$

$k(x, \xi; h) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{h}{h^2+(\xi-x)^2}$, *сходится (по метрике пространства $C(R^{(1)})$) к функции $\zeta(x)$, т. е. сходится к решению нелинейного интегрального уравнения*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{h(\xi)} \frac{\eta}{(\xi-x)^2+\eta^2} d\eta = u_2(x)$$

при условии, что каждое из приближений $\zeta_n(x)$ принадлежит компактному множеству

$$V_0^{(1)}(A^*) = \{\zeta(x):\quad \zeta^{(k)} \in L^{(2)}(R^{(1)});\quad \left\|\zeta^{(k)}\right\|_2 \le C^{(k)},\quad k = 0, 1\},$$

$$C^{(0)} = 2e^{-wh},\quad C^{(1)} = 2we^{-wh},\quad w \ge 0,$$

и что выполняется неравенство

$$\max|\zeta(x)| < h \quad \text{при} \quad x \in R^{(1)}.$$

Отсутствие эффективных критериев принадлежности элементов из $L^{(2)}$ множествам $V(A^*)$ и $V(A)$ приводит к тому, что решения интегральных уравнений рассматриваемых задач не удовлетворяют условиям непрерывной зависимости от входных данных. Уже по одному только этому признаку данные задачи относятся к некорректным в классическом смысле. Некорректность задач обусловлена их недоопределенностью. Доопределить задачи в рамках здравого смысла можно по-разному,

например, так, как сделано выше. Так или иначе процедура доопределения задачи, сформулированной в виде некоторого функционального уравнения, связывается каждый раз с поиском определенного множества, называемого множеством корректности, на котором уравнение однозначно разрешимо. В связи с этим в вопросах разрешимости некорректных задач центральное место заняли проблемы единственности решений. Для последующего изложения понадобится такое определение. Будем говорить, что область D принадлежит классу $Liap^{(k,\alpha)}$ (порядка k, степени α), если ее границу ∂D можно покрыть конечной совокупностью $\{\partial T_i\}_{i=1}^{n}$ подобластей ∂T_i, в каждой из которых координаты текущей точки $x=(x_1, x_2)$ границы допускают параметрическое представление $x_j = x_j(t)$, $t \in \partial T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывными по Гельдеру (степени α) функциями класса $C^{(k,\alpha)}(\partial T_i)$. Границу области класса $Liap^{(1,\alpha)}$ первого порядка называют многообразием (поверхностью, кривой) Ляпунова.

На сегодняшний день найдено ограниченное число подклассов областей класса $Liap^{(1,\alpha)}$, границы которых могут быть однозначно определены по созданному ими внешнему полю. Это прежде всего классы ограниченных областей, звездных по отношению к некоторой внутренней их точке, а также классы неограниченных областей, звездных по отношению к бесконечно удаленной точке. Именно имеют место

Теорема Новикова [38]. *Если два ограниченных тела D_k, $k = 1, 2$, класса $Liap^{(1,\alpha)}$, заполненные массами с постоянной плотностью σ (равной единице) и звездные относительно некоторой общей (внутренней) точки, развивают вне области $D_0 = D_1 \bigcup D_2$ одинаковые внешние потенциалы*

$$U(x;\sigma, D_1) = U(x;\sigma, D_2), \quad x \notin D_0,$$

то тела совпадают друг с другом, $D_1 \equiv D_2$.

Теорема Страхова [90]. *Если два неограниченных тела $\Pi_i = \{\xi: \ \xi_1 \in R^{(1)}, \quad 0 < h \le \xi_2 \le \zeta^{(i)}(\xi_1)\}, \ i = 1, 2,$ из полосы $\Pi = \{\xi: \ \xi_1 \in R^{(1)}, \quad 0 < h \le \xi_2 \le h_0\}$ класса $Liap^{(1,\alpha)}$, заполненные массами одной и той же постоянной плотности σ и звездные по отношению к бесконечно удаленной точке генерируют вне полосы Π равные потенциалы*

$$U(x;\sigma, \Pi_1) = U_2(x;\sigma, \Pi_2), \quad x \notin \Pi,$$

то такие тела тождественно равны друг другу, $\Pi_1 \equiv \Pi_2$.

Для доказательства теорем устойчивости решений рассматриваемых задач понадобятся два вспомогательных утверждения. Впоследствии под «подобными» подразумеваются такие области D_1 и D_2, границы ∂D_i которых описываются соответственно функциями $\zeta_1(x) = \zeta(x)$ и $\zeta_2(x) = \zeta(x) + c$, $x \in \Omega$, c — const, $\Omega = [0, 2\pi]$ для конечных границ, $\Omega = R^{(1)}$ — для границ неограниченных.

Лемма 1. *Если поля $u^{(i)}(\varphi, r)$, порожденные двумя подобными однородными класса $Liap^{(1,\alpha)}$ областями D_i, $i = 1, 2$, незначительно уклоняются друг от друга, т. е. удовлетворяют условию $\left\| u^{(1)}(\varphi, r) - u^{(2)}(\varphi, r) \right\|_C < \varepsilon$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, то и сами области мало отличаются между собой в смысле выполнения неравенства $\left\| \zeta_1(\alpha) - \zeta_2(\alpha) \right\|_C \le a\varepsilon$, где $a = a(\mu, \nu)$ постоянная, связанная с параметрами границы одной из подобных областей.*

Лемма 2. *Если поля* $u^{(i)}(x),\ i=1,2,$ *генерируемые двумя однородными «параллельными» слоями из множества* $Liap^{(1,\alpha)}$, *удовлетворяют условию* $\left\|u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x)\right\|_C<\varepsilon$ *при достаточно малом* $\varepsilon>0$, *то границы «параллельных» слоев незначительно уклоняются друг от друга в смысле выполнения неравенства*

$$\left\|\zeta_1(x)-\zeta_2(x)\right\|_C\le\frac{1+\mu}{1-\mu}\varepsilon.$$

Теорема 2.13 (устойчивости). *Если однозначные функции* $\zeta_i(\alpha)$, $0\le\alpha\le2\pi$, *описывающие границы звездных однородных ограниченных областей* D_i, *принадлежат компактному множеству* $V_0^{(1)}(A^*)$ *и удовлетворяют требованиям* $\left\|\frac{d\zeta_i(\alpha)}{d\alpha}\right\|_C<m<\infty,$ *а порождаемые областями потенциалы* $u^{(i)}(\varphi,r),\ i=1,2,$ *незначительно уклоняются друг от друга в смысле выполнения неравенства* $\left\|u^{(1)}(\varphi,r)-u^{(2)}(\varphi,r)\right\|_C<\varepsilon$ *при достаточно малом* $\varepsilon>0$, *то сами области мало отличаются между собой, так что упомянутые функции подчиняются условию* $\left\|\zeta_1(\alpha)-\zeta_2(\alpha)\right\|_C\le a\varepsilon$, *где* $a=a(\rho,\mu,\nu)$ *— постоянная, зависящая от параметров класса* $V_0^{(1)}(A^*)$.

На основании леммы 2 устанавливается

Теорема 2.14 (устойчивости). *Если однозначные функции* $\zeta_i(x)$, $x\in R^{(1)}$, *описывающие границы раздела двух однородных неограниченных (типа слоя) сред, звездных относительно бесконечно удаленной точки, принадлежат компактному классу* $V_0^{(1)}(A^*)$,*т.е. обе они непрерывно дифференцируемы и их производные удовлетворяют неравенствам* $\left\|\frac{d\zeta_i(x)}{dx}\right\|_C<m<\infty,$ *а порождаемые слоями поля* $u_2^{(i)}(x)$, $i=1,\ 2,$ *незначительно отличаются между собой в смысле выполнения требования* $\left\|u_2^{(1)}(x)-u_2^{(2)}(x)\right\|_C<\varepsilon$, *при достаточно малом* $\varepsilon>0$, *то сами функции (контакты) также мало уклоняются друг от друга, удовлетворяя условию* $\left\|\zeta_1(x)-\zeta_2(x)\right\|_C\le a\varepsilon$, *где константа* $a=a(m,\mu)$ *полностью определяется параметрами класса* $V_0^{(1)}(A^*)$.

Подводя итоги отметим, что решения уравнений задач определения звездных областей, близких к заданным, не обладают устойчивостью на нормированных банаховых пространствах типа $C(\Omega)$ и $L^{(i)}(\Omega)$, $i=1,2$. Это связано с тем, что операторы уравнений являются вполне непрерывными и имеют незамкнутые области значений, а обратные их операторы разрывны на пространствах входных данных. Однако на компактах решения рассматриваемых обратных задач существуют, единственны и устойчивы, т.е. на компактах данные задачи поставлены корректно. Из-за условной корректности задач оказываются непригодными обычные численные методы поиска решений. Для получения практических решений требуются специальные регулярные методы.

2.5. Функционалы в задачах определения областей. В предыдущих пунктах и в заметках [1-3] изложена теория решения задач определения контуров однородных финитных или неограниченных источников, по форме близких к кругу или к слою постоянной толщины. Задачи сведены к решению соответствующих последовательностей линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с вполне непрерывными

операторами в пространствах типа $C(D)$ или $L^{(i)}(D)$, $i = 1, 2$. Установлено, что решения задач существуют, единственны и устойчивы только на компактных множествах $V_0^{(1)}(A^*)$ областей значений $V(A^*)$ сопряженных операторов к операторам уравнений.

Для простоты последующих выкладок ограничимся рассмотрением задачи решения одного интегрального уравнения из предложенной совокупности в гильбертовом пространстве $L^{(2)}(D)$. В свою очередь задачу решения линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A\zeta = v, \quad \zeta \in V_0^{(1)}(A^*), \quad v \in L^{(2)}(D), \tag{2.31}$$

с самосопряженным оператором заменим по установившейся традиции [56-59] задачей минимизации квадратичного функционала невязки

$$F(\zeta) = \|A\zeta - v\|^2 = (A\zeta - v, A\zeta - v) = \int_D \left(\int_D k(x, \xi)\zeta(\xi)d\xi - v(x) \right)^2 dx \tag{2.32}$$

или функционала типа невязки

$$F_C(\zeta) = (A\zeta, \zeta) - 2(v, \zeta) = \int_D \zeta(x) \left(\int_D k(x, \xi)\zeta(\xi)d\xi - 2v(x) \right) dx \tag{2.33}$$

на множестве $V_0^{(1)}(A^*)$ [17]. В связи с этим обозначим через $u = P_{V(A)}v$ проекцию точки v на множество $V(A) = \{u(t)\colon u \in L^{(2)}(D),\ t \in D;\ u = A\zeta,\ \zeta \in V_0^{(1)}(A^*)\}$, через $\zeta_* = \zeta_*(t) = \ = \arg \inf\limits_{\zeta \in V_0^{(1)}(A^*)} \Phi(\zeta), \ t \in D$ точку нижней грани $\Phi_* = \Phi(\zeta_*)$ функционалов (2.32) или (2.33) на $V_0^{(1)}(A^*)$, а через $V_*^{(1)} = \{\zeta(t)\colon \zeta \in V_0^{(1)}(A^*), \quad t \in D; \quad \Phi(\zeta) = \Phi_* = \inf\limits_{V_0^{(1)}(A^*)} \Phi(\zeta)\}$ множество всех точек минимума функционалов $\Phi = F$ или $\Phi = F_c$ на области $V_0^{(1)}(A^*) \subset L^{(2)}(D)$ определения точных (нормальных) решений линейного интегрального уравнения (2.31).

Теорема 2.15. *Задача решения линейного интегрального уравнения (2.31) эквивалентна задаче поиска минимума функционала невязки или функционала типа невязки на компактном множестве* $V_0^{(1)}(A^*)$.

Следовательно, функционалы $F(\zeta)$ и $F_c(\zeta)$ унимодальны на $V^{(1)}(A^*)$, точки их минимумов совпадают с нормальными решениями интегральных уравнений. Поэтому для решения уравнения достаточно построить минимизирующую последовательность для каждого функционала, сходящуюся ко множеству $V_*^{(1)}$. В этой связи необходимо выяснить важнейшие свойства функциолналов, которые в значительной степени определяются свойствами оператора уравнения (2.31). Частично их раскрывает

Теорема 2.16. *Функционалы* $F(\zeta)$ *и* $F_c(\zeta)$ *над* $L^{(2)}(D)$ *являются выпуклыми функциями. Функционал* $F(\zeta)$ *полунепрерывен сверху, функционал* $F_c(\zeta)$ *полунепрерывен сверху при* $u = v$ *или при* $(u - v, y) \le 0$, $y \in N(A)$, *а при* $(u - v, y) > 0$ *— полунепрерывен снизу. Множество* $V_*^{(1)}$ *незамкнуто и в любом шаре* $S(x_*, \varepsilon)$ *радиуса* $\varepsilon > 0$ *с центром в точке* $x_* \in V_*^{(1)}$ *найдется хотя бы одна точка* $\zeta_* = x_* + y \in L^{(2)}(D)$, *отличная от* x_*, *в которой функционал достигает своей нижней грани. Гиперповерхность, описываемая*

функционалом $F(\zeta)$ *или* $F_c(\zeta)$, *представляет собою цилиндр с образующей типа параболы, а множество* U_* *всех точек минимума функционала над* $L^{(2)}(D)$ *— это гиперплоскость* $V_*^{(1)} \oplus N(A)$, *где* $N(A)$ *— нульмногообразие оператора* A.

Дифференциальные характеристики функционалов (2.32) и (2.33) описывает

Теорема 2.17. *Функционалы* $F(\zeta)$ *и* $F_c(\zeta)$ *дважды непрерывно дифференцируемы над* $L^{(2)}(D)$, *их градиенты* $F'(\zeta)$ *и* $F'_C(\zeta)$ *принадлежат классу* $C^{(1,1)}(L^{(2)}(D))$ *с константами Липшица* $L = 2\|A^*A\|$ *и* $L = 2\|A\|$ *соответственно. Каждый из функционалов над любыми элементами* ζ, η *из* $L^{(2)}(D)$ *удовлетворяют одному из следующих неравенств*

$$\Phi(\zeta) \ge \Phi(\eta) + (\Phi'(\eta), \zeta - \eta), \qquad (\Phi'(\zeta) - \Phi'(\eta), \zeta - \eta) \ge 0; \quad (\Phi''(\zeta)\eta, \eta) \ge 0;$$

где $\Phi = F$ *или* $\Phi = F_C$.

Как и в случае выпуклых функций одной переменной выпуклые функционалы (2.32) и (2.33) на выпуклом множестве $L^{(2)}(D)$ не могут иметь локальных минимумов. Точнее верна

Теорема 2.18. *Всякая точка локального минимума функционалов* $F(\zeta)$ *и* $F_C(\zeta)$ *над* $L^{(2)}(D)$ *является одновременно точкой их глобального минимума над* $L^{(2)}(D)$, *причем множества* $U_* = \{\zeta: \ \zeta \in L^{(2)}(D), \ \ \Phi(\zeta) = \Phi_* = \inf\limits_{L^{(2)}(D)} \Phi(\zeta)\}$, *всех точек минимума соответствующих функционалов* $\Phi = F$ *или* $\Phi = F_c$ *выпуклы.*

Теорема 2.19. *Множества Лебега* $M(\Phi, c) = \{\zeta(t): \ \zeta \in L^{(2)}(D), t \in D; \ \ \Phi(\zeta) < c\}$, *функционалов* $\Phi = F$ *или* $\Phi = F_c$ *над* $L^{(2)}(D)$ *выпуклы при любой постоянной* $c > 0$.

Критерий оптимальности для функционалов $F(\zeta)$ *и* $F_C(\zeta)$ *над* $L^{(2)}(D)$ *формулируются следующим образом.*

Теорема 2.20. *Для того чтобы точка* ζ_* *принадлежала множеству* U_* *какого-нибудь из выпуклых функционалов* $F(\zeta)$ *и* $F_C(\zeta)$ *над* $L^{(2)}(D)$, *необходимо и достаточно, чтобы первые и вторые производные функционалов удовлетворяли в этой точке требованиям* $\Phi'(\zeta_*) = 0$, $(\Phi''(\zeta_*)\eta, \eta) \ge 0, \quad \forall \eta \in L^{(2)}(D)$, *где* $\Phi = F$ *или* $\Phi = F_C$.

Любопытна интерпретация этого результата. Оказывается, что в банаховых пространствах условия $\Phi'(\zeta_*) = 0, \quad (\Phi''(\zeta_*)e, e) > 0, \quad e \ne 0$ не являются (в отличие от аналогичных требований для обыкновенных функций) достаточными для (глобального) минимума функционала. Действительно, если глобальный минимум Φ_* функционала $\Phi(\zeta)$ достигается в точке $x_* \in V_*^{(1)} \subset U_*$, то в соответствии с теоремой 2.16 он достигается и в любой точке $\zeta_* = x_* + y$ пространства $L^{(2)}(D)$, где $y \in N(A)$. Поэтому хотя любая минимизирующая последовательность $\{\zeta^{(n)}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\zeta^{(n)}) = \Phi_*$, всегда сходится к множеству U_*, к множеству $V_*^{(1)}$ единственности решения уравнения (2.31) может и не сходиться. В этой связи попытки определить нормальное решение соответствующего уравнения первого рода при помощи минимизации функционалов невязки с дополнительным требованием минимальности нормы решения зачастую обречены на неудачу.

Для корректировки минимизирующих последовательностей в нужном направлении введем функционалы

$$\Omega(\zeta) = (D\zeta, D\zeta) \equiv \int_D \left(\zeta(x) + q\,\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\Omega_C(\zeta) = (\zeta, D\zeta) \equiv \int_D \zeta(x)\left(\zeta(x) + q\,\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right)dx$$

на множествах

$K_{\text{П}}^{(1)}(\Psi, c) = \{\zeta(\varphi)\colon \zeta, \zeta' \in L^{(2)}[0, 2\pi];\quad \zeta(\varphi+2\pi) = \zeta(\varphi),\quad \zeta'(\varphi+2\pi) = \zeta'(\varphi);\quad \Psi(\zeta) \le c\}$

$K_{\text{Н}}^{(1)}(\Psi, c) = \{\zeta(x)\colon \zeta, \zeta' \in L^{(1)}(R^{(1)}) \bigcap L^{(2)}(R^{(1)}); \zeta(-\infty) = \zeta(+\infty) = 0, \zeta'(-\infty) = \zeta'(+\infty) = 0;$

$\Psi(\zeta) \le c\},$

где $D = E + q\,\dfrac{\partial}{\partial x}$, E — тождественный в $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, $m =$ *П, Н,* оператор, $\Psi = \Omega$ или $\Psi = \Omega_C$, $R^{(1)} = (-\infty, \infty)$, q — некоторое положительное число, определяющее вес производной. Первый из функционалов $\Omega(\zeta)$ будем иногда называть сильным, а второй — $\Omega_c(\zeta)$ — слабым. Для функционалов справедлива

Теорема 2.21. *Функционалы* $\Omega(\zeta)$ *и* $\Omega_C(\zeta)$ *на множествах* $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, $m =$ *п, н, неотрицательны, сильно выпуклые, дифференцируемые функции класса* $C^{(2)}(K_m^{(1)})$ *имеют градиенты класса* $C^{(1,1)}(K_m^{(1)})$ *и удовлетворяют неравенствам* $\Psi(\zeta) \ge \Psi(\eta) + (\Psi'(\eta), \zeta - \eta) + \|\zeta - \eta\|^2$, $(\Psi'(\zeta) - \Psi'(\eta), \zeta - \eta) \ge 2\|\zeta - \eta\|^2$, $(\Psi''(\zeta)\eta, \eta) \ge 2\|\eta\|^2$, *где* $\Psi = \Omega$ *или* $\Psi = \Omega_C$.

Следствие. *Функционалы* $\Omega(\zeta)$ *и* $\Omega_C(\zeta)$ *на множествах* $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, $m =$ *П, Н*; $\Psi = \Omega, \Omega_C$, *не имеют локальных минимумов, отличных от глобального, достигаемого на элементе* $\zeta(x) \equiv 0, \quad x \in D.$

Выделим во множестве $K_{П}^{(1)}(\Omega, c)$ подмножество $K_{П}^{(2)}(\Omega, c) = \{\zeta(\varphi)\colon \quad \zeta \in K_{П}^{(1)}(\Omega, c)$, $\zeta'' \in L^{(2)}[0, 2\pi];\quad \zeta''(\varphi + 2\pi) = \zeta''(\varphi)\}$ при $m =$ *П* или $K_H^{(2)}(\Omega, c) = \{\zeta(x)\colon \zeta \in K_H^{(1)}(\Omega, c);$ $\zeta'' \in L^{(1)}(R^{(1)}) \bigcap L^{(2)}(R^{(1)})\}$ при $m =$ *Н* и подадим на $K_m^{(2)}(\Omega, c)$ функционал $\Omega(\zeta)$ следующим образом $\Omega(\zeta) = (\zeta, D^* D\zeta) \equiv (\zeta, D^{(2)}\zeta),$ где $D^{(2)} = \left(E - q\,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(E + q\,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$. Нетрудно убедиться, что дифференциальный оператор $D^{(2)}$ положительный и симметричный (самосопряженный) в $K_m^{(2)}(\Omega, c)$. Для него справедливы

Теорема 2.22. *Последовательности*

$$1,\quad 1+q^2,\quad 1+q^2,\quad \ldots, 1+q^2n^2,\quad 1+q^2n^2, \ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\varphi, \ldots,$$

образуют полную систему собственных чисел и соответствующих им собственных функций непрерывного, положительного, самосопряженного дифференциального оператора $D^{(2)}$ *в* $K_{П}^{(2)}(\Omega, c)$.

Теорема 2.23. *Последовательности* $\{1 + q^2\omega^2, 1 + q^2\omega^2\}$ *и* $\{\cos\omega x, \sin\omega x\}$ *образуют в* $K_H^{(2)}(\Omega, c)$ *полную систему собственных чисел и соответствующих им регулярных обобщенных собственных функций непрерывного, положительного, самосопряженного дифференциального оператора* $D^{(2)}$.

Вспоминая теоремы 2.8 и 2.9 заключаем, что (обобщенные) собственные функции оператора $D^{(2)}$ в $K_m^{(2)}(\Omega, c)$ совпадают с (обобщенными) собственными функциями линейного интегрального оператора

задачи восстановления финитной или неограниченной типа слоя области, что в конечном счете можно эффективно использовать при конструировании алгоритмов численного решения задач определения возмущающих областей.

2.6. Вариационный принцип отбора допустимых решений. В заметке [21], символика которой используется и в данном сообщении, показано, что поиск решения линейного интегрального уравнения первого рода с неотрицательным симметричным в $L^{(2)}(D)$ оператором в виде минимизирующей последовательности любого из функционалов невязки $F(\zeta)$ или типа невязки $F_C(\zeta)$ над $L^{(2)}(D)$ является некорректной задачей, ибо не любая минимизирующая последовательность сходится ко множеству $V_0^{(1)}(A^*)$ нормальных решений уравнения. И для того чтобы сделать задачу корректной, необходимо было ввести сильный $\Omega(\zeta)$ или слабый $\Omega_C(\zeta)$ функционалы над структурами $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, $m = п, н$; $\Psi = \Omega, \Omega_c$. В необходимости таких рассмотрений мы убедимся, если покажем, что множество $K_m^{(1)}(\Phi, \Psi; c, d) = \{\zeta(x):$ $\zeta \in K_m^{(1)}(\Psi, c) \bigcap M(\Phi, d);$ $\Phi(\zeta) < d$, $\Psi(\zeta) < c\}$ допустимых функций $\zeta(x)$, характеризующееся пересечением области определения $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ функционала $\Psi(\zeta)$ с соответствующим множеством Лебега $M(\Phi, d)$ функционала $\Phi = F$ при достаточно малом $d = \varepsilon^2$ или $\Phi = F_C$ при достаточно большом $d \geq 0$, является компактным (в метрике $C(D)$). Имеет место

Теорема 2.24. *Функционалы $\Omega_C(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ над $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ являются стабилизаторами задачи решения линейного интегрального уравнения первого рода $A\zeta = v$, $\zeta, v \in L^{(2)}(D)$, с неотрицательным самосопряженным оператором.*

Следствие. *Каждое из выпуклых множеств $K_m^{(1)}(\Phi, \Psi; c, d)$, $m = п, н$; $\Phi = F, F_C$; $\Psi = \Omega, \Omega_C$; компактно в метрике $C(D)$, при любых $c \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ для $\Phi = F$ и любых $c \geq 0$, $d \geq 0$ для $\Phi = F_C$.*

В связи с тем, что точка глобального минимума любого из стабилизаторов $\Omega_C(\zeta)$ и $\Omega(\zeta)$ не совпадает, как правило, с каким бы то ни было нормальным решением уравнения $A\zeta = v$ при $v \neq 0$ (следствие теоремы 2.21), это решение вслед за А. Н. Тихоновым можно искать не в виде решения задачи на минимум $\Psi(\zeta)$ над $K_m^{(1)}(\Phi, \Psi; c, d)$, а как решение задачи минимизации $\Psi(\zeta)$ на $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ при условии, что на экстремали ζ выполняется равенство $F(\zeta) = \varepsilon^2$ при достаточно малом $\varepsilon \geq 0$ и достаточно большом $c \geq 0$. Для обоснования такой замены приводится

Теорема 2.25. *Если точная нижняя грань стабилизатора $\Psi(\zeta)$, $\Psi = \Omega_C, \Omega$ над выпуклым множеством $K_m^{(1)}(\Phi, \Psi; c, d)$, определяемым достаточно большими $c \geq 0$ и $d \geq 0$ для $\Phi = F_C$ и достаточно малым $\varepsilon \geq 0$ для $\Phi = F$, достигается на функции $\zeta^{(\varepsilon)}(x)$ из компакта $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, то невязка для этой функции определяется равенством $\left\| A\zeta^{(\varepsilon)} - v \right\|_{L^{(2)}(D)} = \varepsilon$.*

В результате приходим к типичной классической задаче вариационного исчисления на условный экстремум, которую будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим лагранжиан, который будем называть сглаживающим функционалом Тихонова,

$$\mathrm{T}(\zeta;\alpha)=\Phi(\zeta)+\alpha\,\Psi(\zeta)$$

и на множестве $K_m^{(1)}(\Psi,c)$ будем отыскивать такой элемент $\zeta^{(\alpha)}(x)$, $x\in D$, на котором функционал $\mathrm{T}(\zeta;\alpha)$ достигает своей точной нижней грани $\mathrm{T}(\zeta^{(\alpha_0)};\alpha_0)$ с параметром регуляризации α_0, определяемым из условия $\left\|A\zeta^{(\alpha_0)}-v\right\|_{L^{(2)}(D)}=\varepsilon.$ Функционал Тихонова как сумма дифференцируемых выпуклого $\Phi(\zeta)$, $\Phi=F_C,F$, и сильно выпуклого $\Psi(\zeta)$, $\Psi=\Omega_C,\Omega$, функционалов над выпуклым множеством $K_m^{(1)}(\Psi,c)$ является сильно выпуклым дифференцируемым функционалом над тем же множеством. Из теорем 2.17 и 2.21 следует, что единственная точка его минимума (если она существует) вычисляется при фиксированном $\alpha>0$ из условия равенства нулю первой вариации функционала $T(\zeta;\alpha)$ на компакте $K_m^{(1)}(\Psi,c)$ в виде решения функционального уравнения Эйлера. Конкретно в рассматриваемой ситуации возможны следующие модификации сглаживающего функционала Тихонова

$$T_{CC}(\zeta;\alpha)=F_C(\zeta)+\alpha\Omega_C(\zeta),$$

$$T_{CO}(\zeta;\alpha)=F_C(\zeta)+\alpha\Omega(\zeta),$$

(2.34)

$$T_{OC}(\zeta;\alpha)=F(\zeta)+\alpha\Omega_C(\zeta),$$

$$T_{OO}(\zeta;\alpha)=F(\zeta)+\alpha\Omega(\zeta),$$

где, напомним $F_C(\zeta)=(\zeta,A\zeta-2v)$, $F(\zeta)=\left\|A\zeta-v\right\|^2$, $\Omega_C(\zeta)=(\zeta,D\zeta)$, $\Omega(\zeta)=(D\zeta,D\zeta)$, $D=E+q\dfrac{\partial}{\partial x}$ [21]. Заметим, что первые три модификации функционала из четырех перечисленных в (2.34) не рассматривались вплоть до настоящего времени. В основополагающих трудах [56, 58, 59, 69, 91] и в многочисленных других работах этого направления решения большинства линейных обратных задач геофизики сводились к поиску минимума сглаживающего функционала типа $T_{OO}(\zeta;\alpha)$, представляющего собой, в частности, взвешенную сумму функционала невязки $F(\zeta)$ и стабилизатора типа нормы в $L^{(2)}(D)$ искомого решения. В данной заметке обосновывается поиск устойчивого решения линейного интегрального уравнения первого рода с неотрицательным симметричным оператором, реализуемый путем минимизации функционалов $T_{CC}(\zeta;\alpha)$ и $T_{CO}(\zeta;\alpha)$.

Условие минимума на $K_m^{(1)}(\Psi,c)$ для каждого из функционалов (2.34) приводит соответственно к следующим уравнениям Эйлера

$$(A+\alpha E)\zeta=v;\qquad \zeta(x)\big|_D=0,$$

$$(A+\alpha D^{(2)})\zeta=v;\qquad \zeta(x)\big|_D=0;\quad \left.\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right|_D=0,$$

$$(A^*A+\alpha E)\zeta=A^*v;\qquad \zeta(x)\big|_D=0,$$

(2.35)

$$(A^*A+\alpha D^{(2)})\zeta=A^*v;\qquad \zeta(x)\big|_D=0;\quad \left.\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right|_D=0.$$

Каждое из интегральных или интегро-дифференциальных уравнений (2.35) одинаково хороши в теоретическом плане для отыскания приближенного решения $\zeta^{(\alpha)}(x)$ (при достаточно малом $\alpha > 0$) интегрального уравнения $A\zeta = v$. Однако с точки зрения вычислений на ЭВМ все эти уравнения не эквивалентны друг другу. Действительно, каждое из уравнений (2.35) с положительным оператором сводится при численной реализации его решения к определенной системе линейных алгебраических уравнений с невырожденной положительной симметрической матрицей. Причем, если уравнения типа первых двух из (2.35) редуцируются к системам с матрицами C, то уравнение типа последних двух из (2.35) — с матрицами вида C^*C. Известно [92], что устойчивость численного решения систем зависит от меры обусловленности $cond(C)$ и $cond(C^*C)$ их матриц C и C^*C. И чем больше мера обусловленности матрицы, тем меньше точность численного решения системы с этой матрицей. А так как $cond(C^*C) = \mu^2$, если $cond(C) = \mu$, и мера $cond(C)$ никогда не бывает меньше единицы, то обусловленность матрицы C всегда лучше обусловленности матрицы C^*C и поэтому устойчивость численного решения с матрицей C (по отношению к погрешностям входных данных и округления) всегда выше устойчивости численного решения системы с матрицей C^*C. В связи с этим ограничимся исследованием первых двух из четырех выписанных функционалов (2.34) и уравнений (2.35).

Для выяснения принципиально важного вопроса существует или нет функция $\zeta^{(\alpha_0)}(x)$ из множества $K_m^{(1)}(F_C, \Psi; c, d)$, определяемая параметром $\alpha_0 > 0$, такая, что функционал типа $T_{CC}(\zeta; \alpha)$ или $T_{CO}(\zeta; \alpha)$ принимает на ней минимальное значение, а невязка уравнения $A\zeta = v$ достигает величины $\left\| A\zeta^{(\alpha_0)} - v \right\| = \varepsilon$, нам потребуются некоторые характеристики функций $t(\alpha) = T(\zeta^{(\alpha)}; \alpha)$, $f_C(\alpha) = (A\zeta^{(\alpha)} - 2v, \zeta^{(\alpha)})$, $f(\alpha) = \left\| A\zeta^{(\alpha)} - v \right\|$, $\psi^2(\alpha) = \Psi(\zeta^{(\alpha)})$ скалярного аргумента $\alpha \in (0, \infty) = R_+^{(1)}$. Их раскрывает

Теорема 2.26. *Для любых элемента $v \in L^{(2)}(D)$ и числа $\alpha > 0$ экстремали $\zeta^{(\alpha)}(x)$ сглаживающего функционала Тихонова на множестве $K_m^{(1)}(F_C, \Psi; c, d)$ таковы, что на интервале $0 < \alpha \le \alpha_0$ функции $t(\alpha)$, $f_C(\alpha)$ и $f(\alpha)$ являются непрерывными, монотонно возрастающими, выпуклыми вверх, а $\omega_C^2(\alpha)$ и $\omega^2(\alpha)$ — непрерывными, монотонно убывающими, выпуклыми вниз функциями.*

Следствие 1. *Если $\zeta^*(x)$ — произвольная функция, принадлежащая компактному множеству $K_m^{(1)}(\Psi, c)$, то $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \zeta^{(\alpha)}(x) = \zeta^*(x), \quad x \in D.$*

На основании следствия легко выбирается исходное значение параметра регуляризации в виде $\alpha_0 \le \alpha_{\max} \le \dfrac{\|v\| \left\| A\zeta^* - v \right\|}{\left\| \zeta^* \right\|^2}$ для $\zeta^* \in K_m^{(1)}(\Psi, c)$.

Следствие 2. *Для всякого положительного числа $0 \le \varepsilon \le \left\| A\zeta^* - v \right\|$ и любого элемента $\zeta^* \in K_m^{(1)}(\Psi, c)$ существует положительное число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ такое, что $\left\| A\zeta^{(\alpha(\varepsilon))} - v \right\| = \varepsilon$.*

Ответ на основной вопрос о существовании функции $\zeta^{(\alpha_0)}(x)$ из множества $K_m^{(1)}(F_C, \Psi; c, d)$, определяемой параметром $\alpha_0 > 0$, и минимизирующей функционал типа

$T_{CC}(\zeta;\alpha)$ или $T_{CO}(\zeta;\alpha)$ дает

Теорема 2.27. *Если $\zeta_H(x)$ нормальное решение интегрального уравнения $A\zeta = v$ с линейным неотрицательным самосопряженным оператором $A \ge 0$ в $L^{(2)}(D)$, то для всякой функции $v(x)$ из $L^{(2)}(D)$ и любого числа $\alpha > 0$ существует единственная непрерывная функция $\zeta^{(\alpha)}(x)$ с регулярной на D обобщенной производной $\dfrac{\partial\zeta^{(\alpha)}(x)}{\partial x}$ для $\Psi = \Omega_C$ или с интегрируемой в квадрате на D производной для $\Psi = \Omega$, на которой сглаживающий функционал Тихонова $T(\zeta;\alpha) = F_C(x) + \alpha\Psi(\zeta)$ достигает своей нижней грани $T^{(\alpha)} = \inf\limits_{\zeta\in K_m^{(1)}(\Psi,c)} T(\zeta, v;\alpha)$ на множестве $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ при достаточно большом $c = 2\alpha^{-2}\|v\|^2$, а семейство функций $\{\zeta^{(\alpha)}(x)\}$ из $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ для $0 < \alpha \le \alpha_0$ сходится равномерно по метрике, индуцированной стабилизаторами $\Psi = \Omega_C$ или $\Psi = \Omega$, к нормальному (точному) решению при $\alpha \to 0$.*

При доказательстве существенно используется

Лемма. *Если функционал $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, определяется на множестве Лебега $M(F, \varepsilon_0) = \{v\colon \|v - u\| \le \varepsilon_0, u = P_{V(A)}v\}$, элементов $v(x)$ из $L^{(2)}(D)$ по невязке $\varepsilon = \|v - A\zeta^{(\alpha)}\|$ линейного интегрального уравнения $A\zeta = v$ с неотрицательным вполне непрерывным оператором, то его нижняя и верхняя грани на $M(F, \varepsilon_0)$ оцениваются зависимостями*

$$\alpha_H(\varepsilon) = \left(\frac{3\varepsilon^2}{2a^2}\right)^{1/3}, \qquad \alpha_B(\varepsilon) = b^2 e^{\frac{\varepsilon^2}{2\|v\|^2}}$$

соответственно, где a^2 и b^2 — определенные положительные числа.

Доказанной теоремой устанавливается существование регуляризирующего оператора, который определяется на каждой функции $v(x)$ из $L^{(2)}(D)$ и для всех положительных чисел α, функциям из $L^{(2)}(D)$ ставит в соответствие функции из $W_2^{(1)}(D)$, каждая из которых в свою очередь минимизирует функционал $T(\zeta;\alpha)$ на множестве $K_m^{(1)}(\Psi, c)$ так, что функция $\zeta^{(\alpha)} = (A + \alpha E)^{-1}v \in W_2^{(1)}(D)$ минимизирует $T_{CC}(\zeta;\alpha)$, а функция $\zeta^{(\alpha)} = (A + \alpha D^* D)^{-1}v \in W_2^{(1)}(D)$ доставляет минимум $T_{CO}(\zeta;\alpha)$ на $K_m^{(1)}(\Psi, c)$.

Проведенные исследования показывают, что поиск решений линейных интегральных уравнений первого рода в рамках классических рассмотрений [58, 59, 69, 91] не всегда бывают наиболее эффективными с вычислительной точки зрения, а требование минимальности нормы решения уравнения и вовсе недостаточно для рассматриваемого круга задач. Для таких задач (когда операторы уравнений неотрицательны) более эффективным оказывается поиск решения при помощи минимизации функционалов типа невязки $F_C(\zeta)$ при условии минимальности стабилизирующих функционалов на компактах в $W_2^{(1)}(D) \subset L^{(2)}(D)$, обеспечивающих однозначную разрешимость исходных задач.

2.7. Построение регуляризующих операторов определения областей. Предлагаемое вниманию рассмотрение следует считать продолжением серии статей [14-16, 20]. В работе [20] установлено существование таких регуляризующих операторов для линейных интегральных уравнений первого рода с неотрицательными симметрическими

операторами, которые среди используемых геофизиками модификаций таких операторов обладают наилучшей обусловленностью и, следовательно, обеспечивают *самую высокую точность* вычислений. Регуляризующие операторы определены процедурой минимизации сконструированных сглаживающих функционалов, представляющих собой каждый взвешенную сумму функционала типа невязки с одним из предложенных стабилизаторов, обеспечивающих условия однозначной разрешимости исходных линейных интегральных уравнений (в смысле слабой или сильной сходимости). Построенные регуляризующие операторы ставят в соответствие каждой функции гильбертова пространства $L^{(2)}(D)$ входных данных функции гильбертова пространства $W_2^{(1)}(D)$ решений, имеющих обобщенную производную.

Вооружившись этими конструкциями, приступим наконец к практическому построению *глобальных регуляризующих операторов определения звездных областей* в постановках (1.10) и (1.23). В этом построении сосредоточим внимание прежде всего на разрешении проблемы проектирования произвольных элементов пространства данных $L^{(2)}(D)$ на множество $V(A)$ значений оператора прямого соответствия, отстоящих достаточно далеко от этого множества; проблемы, которая раньше была только обозначена в [15], а теперь в связи с утверждениями теорем 2.7 и 2.8 вышедшая в разряд первостепенных. Важность разрешения этой проблемы в общей конструкции глобальных регуляризующих операторов для задач (1.10) и (1.23) заключается в том, что для элементов из $L^{(2)}(D)$, отстоящих далеко от $V(A)$, т. е. для правых частей $v(x)$, $x \in D$, уравнений (1.10) и (1.23), отягощенных большими погрешностями, могут не выполняться условия теоремы 2.27, обеспечивающие существование в данной ситуации регуляризующего оператора.

2.7.1. Сглаживание входных данных задачи (1.10). Процедуры сглаживания измеренных на земном рельефе полей, направленного на элиминирование больших погрешностей, будем строить с учетом последующего использования значений этих полей в задачах (1.10) и (1.23). В первой из них теория метода ее решения разработана в предположении, что значения поля заданы на окружности, охватывающей источник поля и нигде с ним не пересекающейся, во второй — используются значения поля на прямой, не пересекающей “нижней” границы гравитирующего слоя. Поэтому процедуру сглаживания поля, которое будет использоваться для решения задачи (1.10), построим так, чтобы сглаженные значения поля оказались сразу на заданной окружности. В то же время процедуру сглаживания поля в задаче (1.23) построим в предположении, что земной рельеф хорошо аппроксимируется упомянутой выше прямой. Для того чтобы получить сглаженные значения поля на окружности $\partial K_r : x^2 + y^2 = r^2$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $(x, y) = (0, 0)$ плоскости $R^{(2)}$ по значениям поля, измеренным на земном рельефе, предположим, что земной рельеф достаточно хорошо аппроксимируется прямой $y = h \geq r$ и сформулируем следующую вспомогательную задачу:

найти гармоническую функцию $u(x, y)$ *в любой точке* (x, y) *плоскости* $R^{(2)}$ *с выколотым кругом* $K(0, 0; \rho)$ *радиуса* $\rho > 0$ *по ее значениям, заданным в виде*

$$v(x_k, h) = u(x_k, h) + \delta(x_k, h) \tag{2.36}$$

приближений $v_k = v(x_k, h)$ *к значениям* $u(x_k, h)$ *с погрешностями* $\delta_k = \delta(x_k, h)$, *оцениваемыми величинами* $\varepsilon_k \geq 0$, *определенных при помощи некоторой системы измерений в дискретной неравномерной сети точек*

$$-a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N \leq a \tag{2.37}$$

с шагом $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 1, 2, \ldots N-1$, *на конечном интервале* $(-a, a)$, $a < \infty$, *прямой*

$$\partial\Pi = \{-\infty < x < \infty;\ y = h\},$$

(2.38)

расположенной "выше" круга K, $\rho < h < \infty$.

Сформулированную задачу будем решать поэтапно. На первом этапе ищем гармоническую функцию $u(x, y)$ в неограниченной области $R_r^{(2)} = R^{(2)} \setminus K(0, 0; r)$ по ее значениям на окружности ∂K_r: $x^2 + y^2 = r^2$. Это известная задача Дирихле для уравнения Лапласа и ее решение в полярной системе координат

$$x = q\cos\varphi, \quad y = q\sin\varphi; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 < q < \infty,$$

имеет вид

$$u(\varphi, q) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{q}\right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

(2.39)

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\,d\varphi, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi,$$

$$u(\varphi) = u(x, y)\big|_{\partial K_r}.$$

На втором этапе попытаемся восстановить гармоническую функцию $u(x, y)$ в области $R_r^{(2)}$ по ее значениям $u(x, h)$ на прямой $\partial\Pi$ (2.38). Для решения задачи воспользуемся представлением (2.39) и преобразуем его с учетом зависимостей

$$\varphi = arctg\frac{x}{y}, \qquad q = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В результате получим

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{(x^2 + y^2)^{k/2}}\left\{a_k \cos\left(k \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + b_k \sin\left(k \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right\} \qquad (2.40)$$

для точек подобласти $R_+^{(2,r)} = \{(x, y):\ \ x^2 + y^2 \ge r^2,\ y > 0\} \in R_r^{(2)}$. А так как, очевидно,

$$\cos\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{H_1^{(0)}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{H_1^{(1)}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

. . . .

. . . .

$$\cos\left(n \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{H_n^{(0)}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}},$$

$$\sin\left(n \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{H_n^{(1)}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}},$$

где

$$H_n^{(0)}(x, y) = \mathrm{Re}(x+iy)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k c_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k},$$

$$H_n^{(1)}(x, y) = \mathrm{Im}(x+iy)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k c_n^{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1} \quad —$$

основные (линейно независимые) гармонические полиномы, $[x]$ — целая часть числа x, c_n^m — биномиальные коэффициенты, то, вводя обозначения

$$\tau_n^{(0)}(x, y) = \frac{r^n H_n^{(0)}(x, y)}{(x^2+y^2)^n}, \qquad \tau_n^{(1)}(x, y) = \frac{r^n H_n^{(1)}(x, y)}{(x^2+y^2)^n},$$

(2.41)

разложение (5) можно переписать в виде

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_k^{(0)}(x, y) + b_k \tau_k^{(1)}(x, y)$$

(2.42)

для $(x, y) \in R_+^{(2,r)}$.

Приступая к вычислению коэффициентов Фурье a_k, b_k разложения (2.42) по значениям поля $u(x,h)$ на прямой $\partial\Pi$, видим из преобразования прямоугольной декартовой системы координат в полярную, что при $-\infty < x < \infty$, $y = h$ должно быть $0 \le \varphi \le \pi$, $d\varphi = \dfrac{h}{x^2+h^2}dx$. Отсюда для определения коэффициентов a_k, b_k получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_k^{(0)}(x,h)dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_k^{(1)}(x,h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)u(x,h)dx,$$

$$a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(0)}(x,h)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(0)}(x,h)\tau_k^{(0)}(x,h)dx +$$

(2.43)

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(0)}(x,h)\tau_k^{(1)}(x,h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(0)}(x,h)u(x,h)dx,$$

$$a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(1)}(x,h)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(1)}(x,h)\tau_k^{(0)}(x,h)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(1)}(x,h)\tau_k^{(1)}(x,h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_m^{(1)}(x,h)u(x,h)dx.$$

Система уравнений (2.43) определяется следующим стандартным способом (отыскания коэффициентов Фурье разложения). Первое уравнение системы получается умножением разложения (2.42) на весовую функцию

$$\omega(x, h) = \frac{1}{\pi}\frac{h}{x^2+h^2}$$

и последующим его интегрированием вдоль всей оси $R^{(1)}(-\infty, \infty)$. Вторая и третья группы уравнений системы (2.43) определяются при помощи умножения разложения (2.42) на взвешенные функции

$$\omega(x,h)\tau_m^{(0)}(x,h) \qquad \text{и} \qquad \omega(x,h)\tau_m^{(1)}(x,h)$$

соответственно с последующим интегрированием произведений по множеству $R^{(1)}$.

Для лучшей обозримости результатов в последующих рассмотрениях упорядочим

последовательности функций $\{\tau_n^{(0)}(x,y), \tau_m^{(1)}(x,y)\}$ и коэффициентов $\{a_k, b_k\}$ следующим образом

$$\tau_1(x,y) = \tau_0^{(0)}(x,y), \qquad z_1 = a_0,$$
$$\tau_{2k}(x,y) = \tau_k^{(0)}(x,y), \qquad z_{2k} = a_k,$$
(2.44)
$$\tau_{2k+1}(x,y) = \tau_k^{(1)}(x,y), \qquad z_{2k+1} = b_k$$

и обозначим

$$a_{ij} = (\tau_i, \tau_j) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_i(x,h)\tau_j(x,h)dx,$$

$$u_i = (\tau_i, u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,h)\tau_i(x,h)u(x,h)dx.$$

В этих обозначениях бесконечная система линейных уравнений (2.43) принимает следующий компактный вид

$$Az = u$$
(2.43$_1$)

где $A = (a_{ij})_{i=1}^{\infty}{}_{j=1}^{\infty}$, $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$, $u = (u_i)_{i=1}^{\infty}$ — бесконечномерная матрица и бесконечномерные векторы соответственно. Следует тут же отметить, что матрица A системы (2.43) в силу представления ее элементов a_{ij} и явного задания гармонических полиномов $\tau_n^{(0)}(x,y)$ и $\tau_n^{(1)}(x,y)$ в виде (2.41) может быть вычислена со сколь угодно большой точностью. Поэтому в последующих рассмотрениях она и ее части воспринимаются как абсолютно точно заданные объекты.

Можно показать, что матрица A *регулярна* и в связи с этим система (2.43) имеет *единственное* (главное) решение $z \in R^{(\infty)}$. Его можно определить при помощи предельного перехода $z = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}$ в решении $z^{(n)}$ конечномерной системы $A_{(n)}z^{(n)} = u^{(n)}$, получающейся из заданной бесконечномерной системы (2.43$_1$) отбрасыванием всех уравнений и всех неизвестных, начиная с $(n+1)$-го. При этом каждая система $A_{(n)}z^{(n)} = u^{(n)}$ из совокупности $\{A_{(n)}z^{(n)} = u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ будет *невырожденной,* поскольку элементы $a_{ij}^{(n)}$ матрицы $A_{(n)}$ этой системы определяются классом линейно независимых основных гармонических полиномов. Последовательность $\{z^{(2m+1)}\}$ решений невырожденных систем

$$A_{(2m+1)}z^{(2m+1)} = u^{(2m+1)}$$
(2.45)

однозначно соотношением (2.44) определит последовательность $\{u^{(m)}(x,y)\}$ приближений

$$u^{(m)}(x,y) = a_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)}\tau_k^{(0)}(x,y) + b_k^{(m)}\tau_k^{(1)}(x,y)$$

гармонической в области $R_+^{(2,r)}$ функции $u(x,y)$ вида (2.42).

Таким образом по информации в виде следа $u(x,h)$ на прямой $\partial\Pi$ (2.38) гармоническая функция $u(x,y)$ восстанавливается однозначно только на собственном подмножестве $R_+^{(2,r)}$ области $R_r^{(2)}$. Для однозначного определения функции $u(x,y)$ во всей области $R_r^{(2)}$ требуется информация в виде следа функции на окружности ∂K_r, ограничивающей область.

Принимая это замечание на будущее рассмотрение третьего этапа решения сформулированной вспомогательной задачи, сразу же заметим, что сведения о функции

типа (2.36-2.37) не являются, очевидно, достаточными для однозначного восстановления гармонической функции $u(x, y)$ не только в области $R_r^{(2)}$, но и на любом ее собственном подмножестве. В этой ситуации речь может идти о получении только некоторого по возможности хорошего приближения этой функции, но не самой функции. В связи с этим под решением сформулированной задачи будем подразумевать такое приближение искомой гармонической функции, которое будет сопоставимо по точности с входными данными.

Переходя непосредственно к третьему этапу в решении сформулированной задачи, попытаемся найти приближение $u^{(m,n)}(x, y)$ гармонической функции $u(x, y)$ в области $R_+^{(2,r)}$ по данным (2.36-2.37). В этой попытке используем аппарат решения задачи предыдущего этапа и определим, задавшись определенным числом $m > 0$, матрицу $A_{(2m+1)}$ и правую часть $u^{(2m+1)}$ системы (2.45). Если при вычислении матрицы $A_{(2m+1)}$ не возникает никаких проблем, ибо функционалы a_{ij} можно вычислить с любой наперед заданной точностью, то при вычислении функционалов

$$u_i = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, h)\tau_i(x, h)u(x, h)dx \qquad (2.46)$$

эти проблемы наяву из-за отсутствия данных на множествах $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ и задания их в дискретной сети узлов (2.37) на интервале $(-a, a)$. Для преодоления возникающих затруднений предлагается следующий прием приближений.

В качестве первого функционала (2.46) примем

$$u_i^{(1)} = \int_{-a}^{a} \omega(x, h)\tau_i(x, h)\sigma^{(1)}(x)dx,$$

где $\sigma^{(1)}(x)$ — *компромиссный (сглаживающий)* кубический сплайн, аппроксимирующий на сетке

$$-a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N \le a \qquad (2.37)$$

с переменным шагом $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$ приближения $v_k = v(x_k, h)$ следа $u(x_k, h)$ гармонической функции с погрешностями $\delta_k = \delta(x_k, h)$, оцениваемыми величинами $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и определяемый граничными условиями

$$\frac{d^2\sigma^{(1)}(x_1)}{dx^2} = \frac{d^2\sigma^{(1)}(x_N)}{dx^2} = 0 \qquad (2.47)$$

Компромиссный кубический сплайн $\sigma^{(1)}(x)$ должен проходить плавно вблизи искаженных погрешностями значений поля v_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, что отвечает требованию

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \left(\sigma^{(1)}(x_k) - v_k\right)^2 = \varepsilon^2, \; (N-1)\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2, \quad p_k = \varepsilon_k^{-2}\left(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m^{-2}\right)^{-1},$$

и удовлетворять условию интерполирования по сглаженным значениям $\sigma_k^{(1)} = \sigma^{(1)}(x_k)$, что обеспечивается минимизацией квадратичного функционала

$$(u'', u'') = \int_{-a}^{a} [u''(x)]^2 dx$$

на классе $W_2^{(2)}(-a, a)$. Другими словами, сглаживающий сплайн $\sigma^{(1)}(x)$ должен отыскиваться в подклассе

$$\Sigma W_2^{(2)}(-a, a) = \left\{\sigma(x): \sigma \in C^{(2)}(-a, a); \quad \sigma''(-a) = \sigma''(a) = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} p_k (\sigma(x_k) - v_k)^2 = \varepsilon^2\right\}$$

класса $W_2^{(2)}(-a, a)$ в виде кубического полинома, который минимизирует функционал

$$\Phi(u; \alpha) = \int_{-a}^{a} [u''(x)]^2 dx + \alpha^{-1} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^{-2} (u(x_k) - v_k)^2, \quad u \in W_2^{(2)}(-a, a), \quad \alpha > 0.$$

В подклассе $\Sigma W_2^{(2)}(-a, a)$ для любого значения x из отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ имеем

$$\frac{d^2\sigma^{(1)}(x)}{dx^2} = s_{k-1} \frac{x_k - x}{\Delta_k} + s_k \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_k}, \qquad (2.48)$$

так как $\dfrac{d^2\sigma^{(1)}(x)}{dx^2} \in C^{(2)}(-a, a)$, причем, очевидно, что

$$\frac{d^2\sigma^{(1)}(x_k)}{dx^2} = s_k, \quad k = 2, 3, \ldots N-1, \qquad (2.49)$$

и в соответствии с условиями (2.47)

$$\frac{d^2\sigma^{(1)}(x)}{dx^2} = s_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2\sigma^{(1)}(x_N)}{dx^2} = s_N = 0. \qquad (2.49_1)$$

Учитывая эти обстоятельства, можем записать

$$\int_{-a}^{a} \left[\frac{d^2\sigma^{(1)}(x)}{dx^2}\right]^2 dx = \sum_{k=2}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[s_{k-1} \frac{x_k - x}{\Delta_k} + s_k \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_k}\right]^2 dx = \qquad (2.50)$$

$$= \sum_{k=2}^{N} s_k \left(\frac{\Delta_k}{6} s_{k-1} + \frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{3} s_k + \frac{\Delta_{k+1}}{6} s_{k+1}\right) = (Bs, s),$$

где $s = (s_2, s_3, \ldots s_{N-1})^*$ — $(N-2)$-мерный вектор сглаживающего сплайна с компонентами (2.49), а B — трехдиагональная матрица $(N-2)$-го порядка вида

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{N-3, N-4} & b_{N-3, N-3} & b_{N-3, N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{N-2, N-3} & b_{N-2, N-2} \end{bmatrix}$$

с элементами $b_{k, k-1} = \dfrac{\Delta_{k+1}}{6}$; $b_{k, k} = \dfrac{\Delta_{k+1} + \Delta_{k+2}}{3}$; $b_{k, k+1} = \dfrac{\Delta_{k+2}}{6}$. С учетом представления (2.50) выражение для сглаживающего функционала приобретает следующий вид

$$\Phi(\sigma^{(1)}; \alpha) = (Bs, s) + \alpha^{-1} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^{-2} (\sigma^{(1)}(x_k) - v_k)^2, \quad \alpha > 0. \qquad (2.51)$$

Для того чтобы придать этому выражению вид зависимости только от значений сглаживающего сплайна на сетке (2.37), где заданы приближенные значения поля,

получим общий вид сплайна $\sigma^{(1)}(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, проинтегрировав дважды обе части равенства (2.48) и вычислив константы интегрирования на сетке (2.37). Будем иметь

$$\sigma^{(1)}(x) = s_{k-1}\,\frac{(x_k - x)^3}{6\Delta_k} + s_k\,\frac{(x - x_{k-1})^3}{6\Delta_k} + \left(\sigma_{k-1}^{(1)} - s_{k-1}\,\frac{\Delta_k^2}{6}\right)\frac{x_k - x}{\Delta_k} + \left(\sigma_k^{(1)} - s_k\,\frac{\Delta_k^2}{6}\right)\frac{x - x_{k-1}}{\Delta_k} \quad (2.52)$$

откуда

$$\frac{d\sigma^{(1)}(x)}{dx} = -s_{k-1}\,\frac{(x_k - x)^2}{2\Delta_k} + s_k\,\frac{(x - x_{k-1})^2}{2\Delta_k} + \frac{\sigma_k^{(1)} - \sigma_{k-1}^{(1)}}{\Delta_k} - \frac{s_k - s_{k-1}}{6}\,\Delta_k$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Из условия непрерывности $\dfrac{d\sigma^{(1)}(x)}{dx}$ элементов класса $\Sigma W_2^{(2)}(-a, a)$ в точках сетки (2.37) получаем $(N-2)$-а уравнения

$$\frac{\Delta_k}{6}\,s_{k-1} + \frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{3}\,s_k + \frac{\Delta_{k+1}}{6}\,s_{k+1} = \frac{1}{\Delta_k}\,\sigma_{k-1}^{(1)} - \left(\frac{1}{\Delta_k} + \frac{1}{\Delta_{k+1}}\right)\sigma_k^{(1)} + \frac{1}{\Delta_{k+1}}\,\sigma_{k+1}^{(1)}$$

для определения вектора s параметров компромиссного сплайна $\sigma^{(1)}(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, 3, \ldots, N,$ по его значениям $\sigma_k{}^{(1)} = \sigma^{(1)}(x_k)$ на дискретной сети точек (2.37). Полученную систему линейных алгебраических уравнений с учетом принятых обозначений в (2.50) можно переписать так

$$Bs = C\sigma^{(1)}, \quad (2.53)$$

где $\sigma^{(1)} = (\sigma_1^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \ldots, \sigma_N^{(1)})^*$ — N-мерный вектор сглаженных значений поля, а C — прямоугольная матрица размера $(N-2)\times N$ вида

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & c_{N-3,\,N-3} & c_{N-3,\,N-2} & c_{N-3,\,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & c_{N-2,\,N-2} & c_{N-2,\,N-1} & c_{N-2,\,N} \end{bmatrix}$$

с элементами $c_{k,\,k} = \Delta_k^{-1}$, $c_{k,\,k+1} = -(\Delta_k^{-1} + \Delta_{k+1}^{-1})$, $c_{k,\,k+2} = \Delta_{k+1}^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$. Матрица B системы (2.53) симметрическая, со строгим диагональным преобладанием, по признаку Адамара она строго положительная и, разумеется, неособенная. Следовательно, вектор s параметров сглаживающего сплайна определяется однозначно. Поэтому сплайн-функция $\sigma^{(1)}(x)$ восстанавливается по формуле (2.52) также однозначно (если известен вектор $\sigma^{(1)}$ сглаженных значений поля).

Для завершения конструкции кубической сплайн-аппроксимации заметим, что вектор s параметров сглаживающего сплайна ввиду соотношения (2.53) линейно выражается через вектор $\sigma^{(1)}$ сглаженных значений поля и поэтому функционал $\Phi(\sigma^{(1)};\alpha)$ есть положительно определенная форма от вектора $\sigma^{(1)}$. Экстремумом формы может быть только минимум, необходимым условием которого является

$$\frac{\partial\Phi(\sigma^{(1)};\alpha)}{\partial\sigma_k^{(1)}} = \frac{\partial}{\partial\sigma_k^{(1)}}(Bs, s) + 2\alpha^{-1}\,\varepsilon_k^{-2}(\sigma_k^{(1)} - v_k) = 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Для первого слагаемого этого равенства со ссылкой на связь (2.53) находим

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_k^{(1)}}(Bs,s)=2\left(\frac{\partial Bs}{\partial\sigma_k^{(1)}},s\right)=2\left(\frac{\partial C\sigma^{(1)}}{\partial\sigma_k^{(1)}},s\right)=2\left(\frac{\partial\sigma^{(1)}}{\partial\sigma_k^{(1)}},C^*s\right)=2(C^*s)_k,$$

где $(C^*s)_k$ — k-ая компонента вектора C^*s, а C^* — матрица размера $N\times(N-2)$, сопряженная матрице C. С учетом выполненного вычисления условие минимума функционала можем переписать следующим образом

$$C^*s+\alpha^{-1}D\sigma^{(1)}=\alpha^{-1}Dv, \quad (2.54)$$

где $D=diag(\varepsilon_k^{-2})\equiv(\varepsilon_k^{-2}\delta_{kj})$ — диагональная матрица N-го порядка, δ_{kj} — символ Кронекера, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_N)^*$ — N-мерный вектор измеренных значений поля на сетке (2.37). Умножая матричное равенство (2.54) слева на матрицу αCD^{-1} и учитывая зависимость (2.53), получим окончательно систему линейных уравнений

$$(B+\alpha CD^{-1}C^*)s=Cv. \quad (2.55)$$

с пятидиагональной симметрической, положительно определенной матрицей.
Единственное (при заданном параметре $\alpha>0$) решение системы

$$s(\alpha)=(B+\alpha CD^{-1}C^*)^{-1}Cv \quad (2.56)$$

дает возможность определить на основании зависимости (2.54) вектор

$$\sigma^{(1)}(\alpha)=v-\alpha D^{-1}C^*s(\alpha) \quad (2.57)$$

и таким образом для фиксированного $\alpha>0$ построить компромиссный сплайн вида (2.52) по вектору $\sigma^{(1)}(\alpha)$ сглаженных значений поля (2.57) и вектору $s(\alpha)$ значений на сети (2.37) вторых производных сплайна (2.56) вместе с граничными условиями (2.49_1).

Для отыскания оптимального сплайна $\sigma^{(1)}(x)$, отвечающего граничным условиям (2.49_1), зададимся направлением $\{\alpha_n\}$ в виде элементов геометрической прогрессии $\alpha_n=q\alpha_{n-1}$ с знаменателем $0<q<1$ и начальным значением $\alpha_0>\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k^{-2}$. Для каждого значения α_n вычислим в соответствии с представлениями (2.56-2.57) последовательности $\{s(\alpha_n)\}$ и $\{\sigma^{(1)}(\alpha_n)\}$, а в них найдем такие векторы $s=s(\alpha_{n_0})$ и $\sigma^{(1)}=\sigma^{(1)}(\alpha_{n_0})$, отвечающие оптимальному значению параметра α_{n_0}, для которого имеет место

$$\left\|\sigma^{(1)}(\alpha_{n_0})-v\right\|_{R^{(N)}}\le\sqrt{N-1}\varepsilon,$$

где $\left\|\sigma^{(1)}-v\right\|_{R^{(N)}}=\left(\sum_{k=1}^{N}(\sigma_k^{(1)}-v_k)^2\right)^{1/2}$. По найденным оптимальным параметрическим векторам s и $\sigma^{(1)}$ построим в соответствии с выражением (2.52) сглаживающий сплайн $\sigma^{(1)}(x)$, $x\in[x_{k-1},x_k]$, $k=2,3,\ldots,N$, который примем в качестве аналитического представления первого приближения $u^{(m,1)}(x,h)$ потенциала $u(x,h)$ на конечном интервале $(-a,a)$ при вычислении первого приближения $u_i^{(1)}$ функционала (2.46).

Последующие гладкие восполнения значений потенциала $u(x,h)$ на $\partial\Pi$, в которых уточняются не только число m членов разложения $u^{(m)}(x,y)$, определяемого решением системы (2.45), но и приближения потенциала вне интервала $(-a,a)$, выполняются следующим образом. Задаемся возрастающей цепочкой вложенных друг в друга конечномерных компактных множеств

$$T_1\subset T_3\subset\ldots\subset T_{2n+1}\subset\ldots\subset T\subset W_2^{(2)}(\partial\Pi),$$

порожденных системой

$$\{1,\, \tau_k^{(0)}(x,h),\, \tau_k^{(1)}(x,h)\}_{k=1}^{n}$$

линейно независимых основных гармонических полиномов, замыкание объединения которых совпадает с компактом T, содержащим потенциал $u(x,y)$ в виде разложения (2.42) при $y=h$. Затем отыскиваем в цепочке то подпространство T_{2n+1}, на которое проектируется потенциал (2.42) с точностью, сопоставимой с погрешностями исходных данных. Число n членов разложения $u^{(n)}(x,y)$ подбираем так, чтобы выполнялись включения $T_{2m+1} \subset T_{2m+3} \subset \ldots \subseteq T_{2n+1}$, для любого $m \le n$, т. е. удовлетворялось требование

$$\max_m \left\| \sigma^{(1)}(x) - a_0^{(m)} - \sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)} \tau_k^{(0)}(x,h) + b_k^{(m)} \tau_k^{(1)}(x,h) \right\|_{L^{(2)}(-a,a)} \le$$

$$\le \left\| \sigma^{(1)}(x) - a_0^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \tau_k^{(0)}(x,h) + b_k^{(n)} \tau_k^{(1)}(x,h) \right\|_{L^{(2)}(-a,a)} \le \sqrt{N-1}\,\varepsilon.$$

В выписанных выражениях, напомним, вектор $z^{(2m+1)} = (a_0^{(m)}, a_k^{(m)}, b_k^{(m)})^*{}_{k=1}^{m}$ для каждого числа $m \le n$ определяется решением системы (2.45) с вектором-правой частью $u^{(2m+1)}$ с компонентами

$$u_i^{(2m+1,1)} = \int_{-a}^{a} \omega(x,h)\tau_i(x,h)\sigma^{(1)}(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m+1.$$

(2.58)

При условии, что необходимое число n разложения

$$u^{(n)}(x,y) \le a_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \tau_k^{(0)}(x,y) + b_k^{(n)} \tau_k^{(1)}(x,y)$$

(2.59)

выбрано, последующее гладкое восполнение потенциала $u^{(n,2)}(x,h)$ на прямой $\partial\Pi$ осуществляется так.

Вычисляем производную

$$\frac{\partial u^{(n)}(x,h)}{\partial x} = -\sum_{k=1}^{n} k[a_k^{(n)} \tau_{k+1}^{(0)}(x,h) + b_k^{(n)} \tau_{k+1}^{(1)}(x,h)]$$

и определяем величины

$$\sigma_j' = -\sum_{k=1}^{n} k[a_k^{(n)} \tau_{k+1}^{(0)}(x_j,h) + b_k^{(n)} \tau_{k+1}^{(1)}(x_j,h)],$$

характеризующие собой наклоны функции $u^{(n)}(x,h)$ в соответствующих точках дискретной сети (2.37). Для определения $u^{(n,2)}(x,h)$ на интервале $(-a,a)$ построим сглаживающий сплайн $\sigma^{(2)}(x)$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, 3, \ldots, N$, удовлетворяющий в отличие от требований “свободного провисания” (2.47) следующим граничным условиям

$$\frac{d\sigma^{(2)}(x_1)}{dx} = \sigma_1', \qquad \frac{d\sigma^{(2)}(x_N)}{dx} = \sigma_N',$$

(2.60)

которые дают два дополняющих систему (2.53) уравнения

$$2s_1 + s_2 = \frac{6}{\Delta_2}\left(\frac{\sigma_2^{(2)} - \sigma_1^{(2)}}{\Delta_2} - \sigma_1' \right),$$

(2.61)

$$s_{N-1} + 2s_N = \frac{6}{\Delta_N}\left(\sigma_N' - \frac{\sigma_N^{(2)} - \sigma_{N-1}^{(2)}}{\Delta_N} \right).$$

А на дополнении $(-\infty, -a) \bigcup (a, \infty)$ интервала $(-a, a)$ приближение $u^{(n,2)}(x,h)$ оценим выражением (2.59) при $y = h$. Тогда вместо (2.58) будем иметь более точное приближение функционала (2.46), выражающееся в виде

$$u_j^{(2n+1,2)} = \int_{-a}^{a} \omega(x,h)\tau_j(x,h)\sigma^{(2)}(x)dx + \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty}\right)\omega(x,h)\tau_j(x,h)u^{(n)}(x,h)dx,$$

$$j = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

в котором первый интеграл вычисляется после построения аппроксимационного кубического сплайна $\sigma^{(2)}(x)$, а второй и третий — определяются по приближению $u^{(n)}(x,h)$ аналитическим способом.

Сглаживающий сплайн $\sigma^{(2)}(x)$ будем отыскивать в классе

$$D^{(1)}W_2^{(2)}(-a,a) = \left\{\sigma(x) \colon \sigma \in C^{(2)}(-a,a);\, \sigma'(x_i) = \sigma_i',\, i = 1, N;\, \sum_{k=1}^{N} p_k(\sigma_k - v_k)^2 = \varepsilon^2\right\}$$

при помощи минимизации на этом классе сглаживающего функционала

$$\Phi(\sigma;\alpha) = \int_{-a}^{a} [\sigma''(x)]^2 dx + \alpha^{-1}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^{-2}(\sigma_k - v_k)^2, \quad \alpha > 0.$$

Из условия непрерывности на сетке (2.37) первой производной элементов класса $D^{(1)}W_2^{(2)}(-a,a)$ и дополняющих его граничных условий (2.60) получаем систему линейных уравнений N-го порядка в виде соотношений (2.53) и (2.61), которое совместно запишем в виде

$$Gs = H\sigma^{(2)} + \Delta\sigma, \quad (2.62)$$

где $\sigma^{(2)} = (\sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}, \dots, \sigma_N^{(2)})^*$, $\Delta\sigma = (-\sigma_1', 0, \dots, 0, \sigma_N')^*$ и $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)^*$ — N-мерные векторы значений на сетке (2.37) компромиссного сплайна, его первых и вторых производных; G и H — трехдиагональные матрицы N-го порядка типа матрицы B с элементами

$$g_{11} = 2, \quad g_{12} = 1, \quad g_{1j} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, N;$$

$$g_{k,k-1} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-1} + \Delta_k}, \quad g_{k,k} = 2, \quad g_{k,k+1} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1} + \Delta_k}, \quad g_{k,i} = 0, \quad i < k-1 \text{ и } i > k+1,$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1,$$
$$g_{N,i} = 0, \quad i \le N-2, \quad g_{N,N-1} = 1, \quad g_{N,N} = 2;$$

и

$$h_{11} = -\frac{6}{\Delta_1^2}, \quad h_{12} = \frac{6}{\Delta_1^2}, \quad h_{1j} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, N;$$

$$h_{k,k-1} = \frac{6}{\Delta_{k-1} + \Delta_k} \cdot \frac{1}{\Delta_{k-1}}, \quad h_{k,k} = -\frac{6}{\Delta_{k-1} + \Delta_k}, \quad h_{k,k+1} = \frac{6}{\Delta_{k-1} + \Delta_k} \cdot \frac{1}{\Delta_k}, \quad h_{k,i} = 0,$$

$i < k-1$ и $i > k+1$, $k = 2, 3, \dots, N-1$,

$$h_{N,i} = 0, \quad i \le N-2, \quad h_{N,N-1} = \frac{6}{\Delta_{N-1}^2}, \quad h_{N,N} = -\frac{6}{\Delta_{N-1}^2}$$

соответственно.

Условия минимума сглаживающего функционала приводят с учетом зависимостей (2.62) к следующей системе уравнений

$$H^* s + \alpha^{-1} D\sigma^{(2)} = \alpha^{-1} Dv,$$

где $v=(v_1, v_2, \dots, v_N)^*$ — N-мерный вектор значений поля. Умножением слева на матрицу αHD^{-1} этой системы получим с учетом связи (2.62)

$$(G+\alpha HD^{-1}H^*)s = Hv+\Delta\sigma,$$

откуда при фиксированном параметре регуляризации $\alpha > 0$ найдем

$$s(\alpha)=(G+\alpha HD^{-1}H^*)^{-1}(Hv+\Delta\sigma),$$

$$\sigma^{(2)}(\alpha)=v-\alpha D^{-1}H^* s(\alpha).$$

Полученные зависимости дают возможность определить таким же способом, каким был найден сплайн $\sigma^{(1)}(x)$, оптимальные векторы $\sigma^{(2)}=\sigma^{(2)}(\alpha_{n_0})$ и $s=s(\alpha_{n_0})$, порождающие по формуле типа (2.52) сглаживающий сплайн $\sigma^{(2)}(x)$, позволяющий вычислить с высокой точностью приближения $u_j^{(2n+1,2)}$ функционалов (2.46). Располагая этими приближениями и решая редукционную систему (2.45), можем определить достаточно хорошее приближение

$$u^{(n,2)}(x,y)=a_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{n} a_k^{(2)}\tau_k^{(0)}(x,y)+b_k^{(2)}\tau_k^{(1)}(x,y) \tag{2.63}$$

гармонической функции $u(x,y)$ в области $R_+^{(2,r)}\subset R_r^2$.

При решении редукционных систем линейных уравнений

$$A_{(2m+1)}z^{(2m+1)}=u^{(2m+1)}, \quad m, m+1, \dots, \le n \tag{2.45}$$

с симметрической матрицей $A_{(2m+1)}$, хотя и не вырожденной (в силу линейной независимости основных гармонических полиномов) и поэтому обеспечивающей единственность (точного) решения, но обладающей определителем быстро с ростом числа $m \le n$ стремящимся к нулю, приходится сталкиваться с проблемой сильной неустойчивости численного решения. Для преодоления возникающих при этом затруднений построим регуляризующий алгоритм поиска решения неустойчивой системы с симметрической матрицей при помощи минимизации следующего сглаживающего функционала типа

$$\Phi(z^{(2m+1)};\alpha)=(z^{(2m+1)}, A_{(2m+1)}z^{(2m+1)}-2u^{(2m+1)})+\alpha(z^{(2m+1)}, z^{(2m+1)}) \tag{2.64}$$

над $(2m+1)$-мерным компактным множеством, содержащим точное решение системы (2.45) и содержащимся в евклидовом пространстве $E^{(2m+1)}$ с нормой, индуцированной скалярным произведением

$$(v^{(2m+1)}, w^{(2m+1)})=\sum_{k=1}^{2m+1} v_k^{(2m+1)} w_k^{(2m+1)}, \qquad v^{(2m+1)}, w^{(2m+1)}\in E^{(2m+1)}.$$

Условие минимума приводит к следующей системе линейных уравнений Эйлера

$$[A_{(2m+1)}+\alpha E_{(2m+1)}]z^{(2m+1)}=u^{(2m+1)}, \tag{2.65}$$

где $E_{(2m+1)}$ — единичная матрица $(2m+1)$-го порядка. Оптимальный вектор $z^{(2m+1)}=z^{(2m+1)}(\alpha_{n_0})$ — экстремаль функционала (2.64), — определяющий в конечном счете разложение (2.63), находится по невязке

$$\left\| A_{(2m+1)}z^{(2m+1)}(\alpha_{n_0})-u^{(2m+1)}\right\| \approx \sqrt{N-1}\,\varepsilon$$

среди векторов последовательности $\{z^{(2m+1)}(\alpha_k)\}$, вычисляемых в виде решений регулярной системы (2.65), отвечающих последовательности $\{\alpha_n\}$ значений параметра

регуляризации $\alpha_n > 0$, определяемых геометрической прогрессией $\alpha_n = q\alpha_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots,$ где $0 < q < 1$ и

$$\alpha_0 \le \frac{\left\|u^{(2m+1)}\right\| \left\|A_{(2m+1)} z_*^{(2m+1)} - u^{(2m+1)}\right\|}{\left\|z_*^{(2m+1)}\right\|}$$

в соответствии с следствием 1 теоремы 2.26, где $z_*^{(2m+1)}$ — произвольный $(2m+1)$-мерный вектор с конечной нормой в $E^{(2m+1)}$.

В завершение исследования сформулированной задачи займемся построением поля на окружности $\partial K_r \colon x_1^2 + x_2^2 = r^2$ по значениям поля (2.63), определенным приближенно в области $R_+^{(2,h)}$.

Решение этой задачи будем искать в виде (логарифмического) потенциала простого слоя

$$v(x) = \int_{\partial K_\rho} \mu(\xi) \ln \frac{1}{|x-\xi|} dl_\xi, \quad x = (x_1, x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \tag{2.66}$$

с неизвестной плотностью $\mu(\xi)$, распределенной на окружности $\partial K_\rho \colon x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ радиуса $\rho > 0$, концентрической окружностям $\partial K_r \colon \subseteq \partial K_h$, $\rho < r \le h$. Плотность $\mu(\xi)$, $\xi \in \partial K_\rho$, потенциала зададим на основании теоремы 2.8 в виде отрезка

$$\mu_m(\alpha, \rho) \equiv \mu_m(\alpha) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cos k\alpha + \beta_k \sin k\alpha, \quad m \le n$$

ряда Фурье

$$\mu_{\text{T}}(\alpha, \rho) \equiv \mu_{\text{T}}(\alpha) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\alpha + \beta_k \sin k\alpha$$

с подлежащими определению коэффициентами α_k, β_k, $k \le m \le n$. В связи с определением вида точного значения плотности $\mu_{\text{T}}(\alpha)$ и его приближений $\mu_m(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, рассмотрим множества

$$K_{\Pi, m}^{(1)}(\Psi, c) = \{\mu_m(\alpha) \colon \ \mu_m^{(i)} \in L^{(2)}[0, 2\pi]; \quad \mu_m^{(i)}(\varphi + 2\pi) = \mu_m^{(i)}(\varphi); \quad \Psi(\mu_m) \le c; \quad i = 0, 1\},$$

$$K_{\Pi}^{(1)}(\Psi, c) = \{\mu_{\text{T}}(\alpha) \colon \ \mu_{\text{T}}^{(i)} \in L^{(2)}[0, 2\pi]; \quad \mu_{\text{T}}^{(i)}(\varphi + 2\pi) = \mu_{\text{T}}^{(i)}(\varphi); \quad \Psi(\mu_{\text{T}}) \le c; \quad i = 0, 1\}$$

где $\mu^{(0)}(\alpha) = \mu(\alpha)$, $\mu^{(1)}(\alpha) = \dfrac{\partial \mu(\alpha)}{\partial \alpha}$, $\Psi = \Omega_c, \Omega$ — функционалы, определяемые равенствами

$$\Omega(\zeta) = (D\zeta, D\zeta) \equiv \int_0^{2\pi} \left(\zeta(x) + q \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$\Omega_c(\zeta) = (\zeta, D\zeta) \equiv \int_0^{2\pi} \left(\zeta(x) + q \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x} \right) \zeta(x) dx$$

и $c > 0$ — некоторая константа. Очевидно, что

$$K_{\Pi, 1}^{(1)} \subset K_{\Pi, 2}^{(2)} \subset \dots \subset K_{\Pi, m}^{(1)} \subset \dots \subset K_{\Pi}^{(1)} \subset W_2^{(1)}[0, 2\pi]$$

такая возрастающая цепочка вложенных друг в друга конечномерных компактов $K_{\Pi, m}^{(1)}$ периодических функций, для которой $\mu_{\text{T}} \in K_{\Pi}^{(1)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{\Pi, m}^{(1)}$.

Приближения $\mu_m(\alpha)$ плотности $\mu_{\text{T}}(\alpha)$ потенциала (2.66) будем искать в виде последовательности $\{\mu_m(\alpha)\}_{m=1}^{n}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, экстремалей сглаживающего функционала

$$\mathrm{T}_{CO}(\mu_m, u^{(m,2)}; \chi) = (\mu_m, A\mu_m - 2u^{(m,2)}) + \chi(D\mu_m, D\mu_m,)$$
(2.67)

над множеством $K^{(1)}_{\Pi,m}(\Omega, c)$, $m \le n$, поскольку задача определения плотности (потенциала простого слоя) по значениям потенциала на (части) границы является, как хорошо известно, некорректно поставленной. Элемент $A\mu_m$ в выражении функционала в связи с представлением (2.30) ядра потенциала (2.66) можно записать в виде

$$A\mu_m = \rho\int_0^{2\pi}\mu_m(\alpha)\ln\frac{1}{h\sqrt{1-2\nu_0\cos(\alpha-\varphi)+\nu_0^2}}\,d\alpha =$$
$$= \rho\left\{2\pi(-\ln h)\alpha_0 + \pi\sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_0^k}{k}(\alpha_k\cos k\varphi + \beta_k\sin k\varphi)\right\},$$

где $\nu_0 = \dfrac{\rho}{h} < 1$ и поэтому

$$(\mu_m, A\mu_m) = \rho\left\{(2\pi)^2(-\ln h)\alpha_0^2 + \pi^2\sum_{k=1}^{m}\frac{\nu_0^k}{k}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right\},$$

(2.68)

$$(D\mu_m, D\mu_m) = 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{m}(1+\gamma^2k^2)(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

В то же время для вычисления слагаемого

$$-2(\mu_m, u^{(m,2)})$$
(2.69)

над $K^{(1)}_{\Pi,m}(\Omega, c)$ не достает сведений о граничной функции

$$u^{(m,2)}(x, y)\big|_{\partial K_h} = u^{(m,2)}(\varphi, h) \equiv u^{(m,2)}(\varphi)$$

на окружности ∂K_h: $x^2 + y^2 = h^2$. В самом деле, по значениям поля на (части) прямой $\partial\Pi$ удается, как неоднократно подчеркивалось, определить приближения $u^{(m,2)}(x, y)$ гармонической функции $u(x, y)$ лишь в области $R_+^{(2,h)}$, в том числе и на “верхней” части полуокружности ∂K_h: $x^2 + y^2 = h^2$, $y \ge 0$, при фиксированном h, т. е. на собственной части $[0, \pi]$ отрезка $[0, 2\pi]$, но не на всем отрезке. Базируясь на самой сути (некорректного) определения плотности $\mu_m(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, по значениям поля $u^{(m,2)}(\varphi)$, заданным не на всем отрезке $[0, 2\pi]$, а только на его части $[0, \pi]$, доопределим граничную функцию следующим образом

$$u^{(m,2)}(\varphi) = \begin{cases} u^{(m,2)}(\varphi), & \varphi \in [0, \pi], \\ u^{(m,2)}(2\pi - \varphi), & \varphi \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Отсюда с учетом того, что на полуокружности ∂K_h: $x^2 + y^2 = h^2$, $y \ge 0$,

$$u^{(m,2)}(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

для второй ветви $u^{(m,2)}(\varphi)$ находим

$$u^{(m,2)}(2\pi - \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k\cos k\varphi - b_k\sin k\varphi, \quad \varphi \in (\pi, 2\pi),$$

и немедленно вычисляем выражение (2.69) в виде

$$-2(\mu_m, u^{(m,2)}) = -2\Bigg\{2\pi\alpha_0 a_0 + 4\alpha_0 \sum_{i=1}^{p}\frac{b_{2i-1}}{2i-1} + \pi\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i +$$

$$+4\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{2j}{(2j)^2-(2i-1)^2}\alpha_{2i-1}b_{2j} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\frac{2j-1}{(2j-1)^2-(2i)^2}\alpha_{2i}b_{2j-1}\right]\Bigg\}, \qquad (2.70)$$

где $p = q = \dfrac{m}{2}$, если m — четное число и $p = q+1$, $q = \dfrac{m-1}{2}$, если m — число нечетное.

Условие минимума сглаживающего функционала (2.67) с учетом выражений (2.68-2.70) приводит к определенной системе уравнений Эйлера, из которой легко находим

$$\alpha_0(\chi) = \frac{a_0 + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{b_{2i-1}}{2i-1}}{2\pi(-\ln h)\rho + \chi},$$

$$\alpha_{2k-1}(\chi) = \frac{(2k-1)\left(a_{2k-1} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\frac{2i}{(2i)^2-(2k-1)^2}b_{2i}\right)}{\pi\rho{\nu_0}^{2k-1} + \chi(2k-1)(1+\gamma^2[2k-1]^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, p;$$

(2.71)

$$\alpha_{2k}(\chi) = \frac{2k\left(a_{2k} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{2i-1}{(2i-1)^2-(2k)^2}b_{2i-1}\right)}{\pi\rho{\nu_0}^{2k} + \chi 2k(1+\gamma^2[2k]^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

где γ — весовой коэффициент дифференциального оператора D в стабилизаторе функционала (2.67).

Определим оптимальные значения коэффициентов (2.71) методом невязки. Для этого, задавшись произвольным значением плотности $\mu^*_m(\varphi)$ класса $K^{(1)}_{\Pi,m}(\Omega, c)$, $m \le n$, (например, полагая $\mu^*_m(\varphi) = u^{(m,2)}(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$) и вычислив начальное значение параметра регуляризации

$$\chi_0 \le \frac{\left\|u^{(m,2)}\right\|\left\|A\mu^*_m - u^{(m,2)}\right\|}{\left\|\mu^*_m\right\|}$$

по нормам соответствующих элементов в $L^{(2)}[0, \pi]$, определим направление $\{\chi_k\}$, $\chi_k = q\chi_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, 0 < q < 1$, и отвечающую ему последовательность $\{\alpha_i(\chi_k)\}_{i=1}^{m}$ коэффициентов типа (2.71), обеспечивающих минимум сглаживающего функционала (2.67) для каждого конкретного значения $\chi_k > 0$. Оптимальные значения коэффициентов $\alpha_i = \alpha_i(\chi_{k_0})$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, или, что то же самое, оптимальную плотность

$$\mu_m(\varphi) = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i \cos i\varphi, \qquad (2.72)$$

вычислим в соответствии с теоремой 2.26 и ее следствием 2 из условия

$$\left\|A\mu_m(\chi_{k_0}) - u^{(m,2)}\right\| = \sqrt{N-1}\varepsilon, \qquad (2.73)$$

полагая $\mu_m = \mu_m(\chi_{k_0})$.

Приведем “рабочие” формулы алгоритма определения оптимальной плотности (2.72). При этом в силу громоздкости получаемых формул, обусловленной в первую очередь сложностью выражений (2.71), опустим не несущие важной информации промежуточные выкладки и ограничимся окончательными соотношениями. Для функции $f(\chi)$

скалярного аргумента $\chi > 0$, характеризующей невязку в зависимости от параметра χ, имеем

$$f(\chi) = \left\| A\mu_m(\chi_{k_0}) - u^{(m,2)} \right\|^2 =$$

$$= \pi\chi \left\{ \alpha_0(\chi) A_0(\chi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(1+\gamma^2[2i-1]^2)\alpha_{2i-1}(\chi)A_{2i-1}(\chi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(1+\gamma^2[2i-1]^2)\alpha_{2i-1}(\chi)A_{2i-1}(\chi) \right\} +$$

$$+ 2\left\{ A_0(\chi)\sum_{i=1}^{p}\frac{b_{2i-1}}{2i-1} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{2j}{(2j)^2-(2i-1)^2}A_{2i-1}(\chi)b_{2j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\frac{2j-1}{(2j-1)^2-(2i)^2}A_{2i}(\chi)b_{2j-1} \right\} + \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2,$$

где $\alpha_i(\chi)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, определены формулами (2.71), а величины $A_0(\chi)$, $A_{2i-1}(\chi)$, $A_{2i}(\chi)$ суть

$$A_0(\chi) = \frac{\chi a_0}{2\pi(-\ln h)\rho + \chi} - \frac{4(-\ln h)\rho \sum_{i=1}^{p}\frac{b_{2i-1}}{2i-1}}{2\pi(-\ln h)\rho + \chi},$$

$$A_{2i-1}(\chi) = \frac{\chi(2i-1)(1+\gamma^2[2i-1]^2)a_{2i-1}}{\pi\rho v_0^{2i-1} + \chi(2i-1)(1+\gamma^2[2i-1]^2)} - \frac{4\rho v_0^{2i-1}\sum_{j=1}^{q}\frac{2j}{(2j)^2-(2i-1)^2}b_{2j}}{\pi\rho v_0^{2i-1} + \chi(2i-1)(1+\gamma^2[2i-1]^2)},$$

$$A_{2i}(\chi) = \frac{\chi(2i)(1+\gamma^2[2i]^2)a_{2i}}{\pi\rho v_0^{2i} + \chi(2i)(1+\gamma^2[2i]^2)} - \frac{4\rho v_0^{2i}\sum_{j=1}^{p}\frac{2j-1}{(2j-1)^2-(2i)^2}b_{2j-1}}{\pi\rho v_0^{2i} + \chi(2i)(1+\gamma^2[2i]^2)}.$$

Нетрудно показать, что функция $f(\chi)$, удовлетворяя условию $f(0) = 0$, монотонно возрастает с ростом $\chi > 0$. В самом деле,

$$\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} = \pi\chi \left\{ \frac{4\pi(-\ln h)\rho}{2\pi(-\ln h)\rho + \chi}\alpha_0^2(\chi) + \sum_{i=1}^{p}\frac{(1+\gamma^2[2i-1]^2)^2\pi\rho v_0^{2i-1}}{\pi\rho v_0^{2i-1} + \chi(2i-1)(1+\gamma^2[2i-1]^2)}\alpha_{2i-1}^2(\chi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q}\frac{(1+\gamma^2[2i]^2)^2\pi\rho v_0^{2i}}{\pi\rho v_0^{2i} + \chi(2i)(1+\gamma^2[2i]^2)}\alpha_{2i}^2(\chi) \right\} > 0.$$

Значит, существует единственное значение параметра регуляризации χ_{k_0}, которое обеспечивает выполнение условия (2.73). Его можно найти методом Ньютона или дихотомией, реализуемой на отрезке $[0, \chi_0]$.

Определив таким образом оптимальную плотность (2.72) потенциала простого слоя, вычислим по формуле (2.66) приближение $u^{(m,2)}(\varphi) = u^{(m,2)}(\varphi, r)$ поля на окружности $\partial K_r : x^2 + y^2 = r^2$, $\rho < r \le h$, в виде

$$u^{(m,2)}(\varphi) = \rho \int_{\partial K_r} \mu_m(\alpha) \ln \frac{1}{r\sqrt{1 - 2v\cos(\alpha - \varphi) + v^2}} d\alpha =$$

$$= 2\pi(-\ln r)\rho\alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} \rho \frac{\nu^k}{k} \alpha_k \cos k\varphi, \qquad (2.74)$$

где $\nu = \dfrac{\rho}{r} < 1$, $\alpha_k = \alpha_k(\chi_{k_0})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, восстанавливаются равенствами (2.71) при $\chi = \chi_{k_0}$.

2.7.2. Сглаживание данных в задачах определения финитного контакта. Пусть по значениям $v(x_k) = u(x_k) + \delta(x_k)$ на конечном интервале $(-L, L)$, $L < \infty$, оси $R^{(1)}$ в дискретной неравномерной сети

$$-L \le x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{N-1} < x_N \le L$$

приближений $v_k = v(x_k)$, уклоняющихся от следа $u(x_k)$ гармонической функции $u(x, y)$ с погрешностями $\delta_k = \delta(x_k)$, оцениваемыми величинами $\varepsilon_k > 0$, требуется найти такие достаточно гладкие приближения $u^{(m)}(x_k)$, $m \le n$, следа $u(x_k)$, которые проходили бы плавно вблизи искаженных погрешностями значений v_k поля и удовлетворяли бы условию

$$\left\| u(x) - u^{(m)}(x) \right\|_{R^{(N)}} \le \sqrt{N-1}\,\varepsilon, \quad m \le n,$$

где $\varepsilon = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2 / (N-1) \right\}^{1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$

Рассмотрим два способа решения данной задачи. Первый из них состоит в определении разложения поля в виде отрезка ряда Фурье по его (поля) достаточно гладком восполнении с помощью компромиссного сплайна типа (2.52), а второй — в непосредственном построении регуляризованного отрезка ряда Фурье при условии его дифференцируемости вплоть до второго порядка.

Приступая к реализации первого способа, перепишем для удобства последующего использования выражение кубического компромиссного сплайна

$$\sigma(x) = s_{k-1} \frac{(x_k - x)^3}{6\Delta_k} + s_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6\Delta_k} + (\sigma_{k-1} - s_{k-1} \frac{\Delta_k^2}{6}) \frac{x_k - x}{\Delta_k} + (\sigma_k - s_k \frac{\Delta_k^2}{6}) \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_k};$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N; \qquad \Delta_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

удовлетворяющего условиям “свободного провисания” (2.47), с параметрами s_k, $k = 2, 3, \ldots, N-1$, определяемыми в виде решения системы (2.55), и сглаженными значениями σ_k поля v_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, вычисляемыми в виде вектора (2.57) при оптимальном значении параметра регуляризации. В результате получим

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{3} c_{j,k} x^k, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \qquad (2.75_1)$$

где, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} c_{j,0} &= p_{j-1} x_j^3 - p_j x_{j-1}^3 + q_{j-1} x_j - q_j x_{j-1}, \\ c_{j,1} &= -3p_{j-1} x_j^2 + 3p_j x_{j-1}^2 - q_{j-1} + q_j, \\ c_{j,2} &= +3p_{j-1} x_j - 3p_j x_{j-1}, \\ c_{j,3} &= -p_{j-1} + p_j \end{aligned} \qquad (2.75_2)$$

При

$$p_{j-1} = \frac{s_{j-1}}{6\Delta_j}, \; p_j = \frac{s_j}{6\Delta_j}, \; q_{j-1} = \frac{\sigma_{j-1}}{\Delta_j} - \frac{s_{j-1}\Delta_j}{6}, \; q_j = \frac{\sigma_j}{\Delta_j} - \frac{s_j \Delta_j}{6}, \; j = 2, 3, \ldots, N.$$

Построенный на классе $\Sigma W_2^{(2)}(-L, L)$ сплайн (2.75) по значениям v_k примем в качестве приближения $u^{(n)}(x)$, $x \in (-L, L)$, следа $u(x_k)$ гармонической функции $u(x, y)$, порожденной финитным контактом, и вычислим коэффициенты Фурье этого приближения. Будем, очевидно, иметь

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\sigma(x)dx = \frac{1}{2L}\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=0}^{3}\frac{c_{j,k}}{k+1}(x_j^{k+1} - x_{j-1}^{k+1});$$

$$a_i = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sigma(x)\cos\alpha i x dx = \frac{1}{L}\sum_{j=2}^{N}\Bigg\{\Bigg(\sin\alpha i x_j\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{3-2k}\frac{(-1)^k}{(\alpha i)^{2k+1}}c_{j,m+2k}\prod_{l=1}^{2k}(l+m)\,x_j^m -$$
$$-\sin\alpha i x_{j-1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{3-2k}\frac{(-1)^k}{(\alpha i)^{2k+1}}c_{j,m+2k}\prod_{l=1}^{2k}(l+m)\,x_{j-1}^m\Bigg) +$$
$$+\Bigg(\cos\alpha i x_j\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=0}^{3-2k+1}\frac{(-1)^{k-1}}{(\alpha i)^{2k}}c_{j,m+2k-1}\prod_{l=1}^{2k-1}(l+m)\,x_j^m -$$

(2.76)

$$-\cos\alpha i x_{j-1}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=0}^{3-2k+1}\frac{(-1)^{k-1}}{(\alpha i)^{2k}}c_{j,m+2k-1}\prod_{l=1}^{2k-1}(l+m)\,x_{j-1}^m\Bigg)\Bigg\};$$

$$b_i = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sigma(x)\sin\alpha i x dx = \frac{1}{L}\sum_{j=2}^{N}\Bigg\{\Bigg(\cos\alpha i x_j\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{3-2k}\frac{(-1)^{k+1}}{(\alpha i)^{2k+1}}c_{j,m+2k}\prod_{l=1}^{2k}(l+m)\,x_j^m -$$
$$-\cos\alpha i x_{j-1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{3-2k}\frac{(-1)^{k+1}}{(\alpha i)^{2k+1}}c_{j,m+2k}\prod_{l=1}^{2k}(l+m)\,x_{j-1}^m\Bigg) +$$
$$+\Bigg(\sin\alpha i x_j\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=0}^{3-2k+1}\frac{(-1)^{k+1}}{(\alpha i)^{2k}}c_{j,m+2k-1}\prod_{l=1}^{2k-1}(l+m)\,x_j^m -$$
$$-\sin\alpha i x_{j-1}\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=0}^{3-2k+1}\frac{(-1)^{k+1}}{(\alpha i)^{2k}}c_{j,m+2k-1}\prod_{l=1}^{2k-1}(l+m)\,x_{j-1}^m\Bigg)\Bigg\},$$

где по соглашению принято, что $\prod_{l=1}^{0}(l+m) = 1$ при $m = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{L}$.

Таким образом, искомое разложение поля получим в виде

$$u^{(n)}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k\cos\alpha kx + b_k\sin\alpha kx,$$

если параметр приближения n определен условием

$$\min_{m\le n}\left\|u^{(m)} - v\right\|_{R^{(N)}} = \left\{\sum_{k=1}^{N}(u^{(n)}(x_k) - v_k)^2\right\}^{1/2} = \sqrt{N-1}\,\varepsilon.$$

Перейдем к краткому изложению второго способа решения задачи сглаживания данных (на неравномерной сети). Обозначим через

$$u^{(m)}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m}a_k\cos\alpha kx + b_k\sin\alpha kx, \quad m \le n,$$

(2.77)

регуляризованное приближение поля, известного приближенными своими значениями v_k на дискретной неравномерной сети точек x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, отрезка $(-L, L)$. Обозначим через $x_{k+1/2}$ середину k-го отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ и (в отличие от предыдущего рассмотрения) положим

$$\Delta_k = x_{k+1/2} - x_{(k-1)+1/2}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1.$$

Что же касается длины первого Δ_1 и последнего Δ_N интервалов, то определим их равной $2(x_{1+\frac{1}{2}} - x_1)$ и $2(x_N - x_{(N-1)+\frac{1}{2}})$ соответственно. Тогда коэффициенты Фурье разложения (2.77) по наличной информации можно оценить приближенно следующим образом

$$a_0^* = \frac{1}{2L}\sum_{i=1}^{N} v(x_i)\Delta_i\,,$$

(2.78)

$$a_k^* = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} v(x_i)\cos\alpha k x_i \Delta_i\,, \qquad b_k^* = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} v(x_i)\sin\alpha k x_i \Delta_i\,,$$

$k = 1, 2, \ldots, n.$

Приближение

$$v(x) = a_0^* + \sum_{k=1}^{n} a_k^* \cos\alpha kx + b_k^* \sin\alpha kx$$

разложения поля, заданного своими значениями v_k на дискретной сети, будет мало пригодным для последующего использования. Уточнить его можно так.

Предположим, что разложение (2.77) должно быть достаточно гладким, по меньшей мере обладать ограниченной (обобщенной) второй производной, и составим стабилизатор

$$\Omega(u^{(m)}) = (u^{(m)}, D^* D u^{(m)})\,,$$

определенный на множестве $K_\Pi^{(1)}(\Omega, c)$. Образ Фурье стабилизатора, очевидно, будет

$$\Omega(u^{(m)}) = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{m}(1+q^2k^2)(a_k^2 + b_k^2).$$

Определим на $K_\Pi^{(1)}(\Omega, c)$ сглаживающий функционал

$$\mathrm{T}(u^{(m)}, v; \alpha) = (u^{(m)} - v, u^{(m)} - v) + \alpha\Omega(u^{(m)})$$

и отметим, что

$$\left\| u^{(m)} - v \right\|^2_{L^{(2)}(-L,\,L)} = 2\pi(a_0 - a_0^*)^2 + \pi\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_k^*)^2 + (b_k - b_k^*)^2.$$

(2.79)

Теперь ясно, что регуляризованное решение задачи или, что то же самое, коэффициенты a_k, b_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $m \le n$, разложения (2.77) могут быть найдены в результате минимизации сглаживающего функционала, поскольку экстремаль функционала, как экстремаль положительно определенной формы (при фиксированном значении параметра $\alpha > 0$), может быть только минимумом. Условия минимума дают

$$a_k(\alpha) = \frac{a_k^*}{1+\alpha(1+q^2k^2)}, \qquad b_k(\alpha) = \frac{b_k^*}{1+\alpha(1+q^2k^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad m \le n,$$

(2.80)

если принять, что $a_0 = a_0^*$. Последнее соглашение обусловлено ограниченными сведениями о поле в виде значений v_k, отягощенных погрешностями измерений δ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, которые без дополнительного эксперимента не могут быть улучшены.

Оптимальные значения коэффициентов $a_k = a_k(\alpha_{i_0})$, $b_k = b_k(b_{i_0})$ и параметра $m \le n$, определяются методом невязки на последовательности $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i = q\alpha_{i-1}$, $0 < q < 1$, из условия

$$\left\| u^{(m)}(\alpha_i) - v \right\|_{R^{(N)}} = \sqrt{N-1}\,\varepsilon.$$

(2.81)

Обоснованием метода является следствие 2 теоремы 2.26, хотя в данном случае убедиться в существовании единственного оптимального значения параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{i_0}$

не составляет большого труда.

Действительно, подставляя в выражение (2.79) значения коэффициентов (2.80), легко определяем вид функции скалярного аргумента

$$f(\alpha) = \|u^{(m)}(\alpha) - v\|^2_{L^{(2)}(-L,\,L)} = \pi\alpha^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{(1+q^2k^2)^2[(a_k^*)^2 + (b_k^*)^2]}{[1+\alpha(1+q^2k^2)]^2}, \quad m \le n.$$

И, вычисляя ее производную, видим, что при $\alpha > 0$

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = 2\pi\alpha \sum_{k=1}^{m} \frac{(1+q^2k^2)[(a_k^*)^2 + (b_k^*)^2]}{[1+\alpha(1+q^2k^2)]^3} > 0.$$

Следовательно, функция $f(\alpha)$ является строго монотонно возрастающей и $f(0) = 0$. Поэтому существует единственное значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{i_0}$, которое удовлетворяет уравнению (2.81) и определяет в соответствии с представлениями (2.80) оптимальные значения коэффициентов $a_k = a_k(\alpha_{i_0})$ и $b_k = b_k(\alpha_{i_0})$ разложения (2.77).

В заключение этого пункта отметим, что данный метод сглаживания входных данных сопоставим по точности с первым только лишь в случае плотной сети наблюдений, когда коэффициенты (2.78) вычисляются с небольшими погрешностями. Если же точность получения коэффициентов (2.78) обеспечивается достаточно высокой, то второй способ сглаживания оказывается намного эффективнее первого по быстродействию их реализации на ЭВМ.

2.7.3. Сглаживание данных задачи (1.23). Зададимся целью определить по приближенно заданным в $L^{(2)}(R^{(1)})$ значениям поля на оси $R^{(1)}$

$$v(x) = u(x) + \delta(x), \quad x \in R^{(1)},$$

с погрешностью $\delta = \|\delta(x)\|$, оцениваемой величиной $\varepsilon > 0$, такое гладкое его приближение $u^{(\Pi)}(x)$, которое удовлетворяет требованию

$$\|v(x) - u^{(\Pi)}(x)\| = \varepsilon, \quad u^{(\Pi)} \in K_{\text{H}}^{(1)}(\Omega, c), \tag{2.82}$$

в предположении, что оценка ε погрешности δ достаточно точна.

Задаем над множеством $K_{\text{H}}^{(1)}(\Omega, c)$ сглаживающий функционал

$$\mathrm{T}(u^{(\Pi)}, v; \alpha) = \|u^{(\Pi)} - v\|^2 + \alpha\Omega(u^{(\Pi)}),$$

где

$$\|u^{(\Pi)} - v\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [u^{(\Pi)}(x) - v(x)]^2 dx,$$

$$\Omega(u^{(\Pi)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^{(\Pi)}(x) + q\frac{\partial u^{(\Pi)}(x)}{\partial x}\right]^2 dx$$

и в качестве решения задачи берем среди экстремалей минимизирующей последовательности этого функционала по направлению $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n = q\alpha_{n-1}$, $0 < q < 1$, такую экстремаль, которая удовлетворяет равенству (2.82). Переписав сглаживающий функционал в образах Фурье

$$\mathrm{T}(u^{(\Pi)}, v; \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |u^{(\Pi)}(\omega) - v(\omega)|^2 d\omega + \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (1+q^2\omega^2)|u^{(\Pi)}(\omega)|^2 d\omega,$$

немедленно находим из условия минимума функционала, что

$$u^{(\Pi)}(\omega, \alpha) = \frac{v(\omega)}{1+\alpha(1+q^2\omega^2)} \tag{2.83}$$

или

$$u^{(\Pi)}(x,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\omega)e^{i\omega x}}{1+\alpha(1+q^2\omega^2)}d\omega,$$

где, очевидно,

$$v(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}v(x)\,e^{-i\omega x}dx.$$

Остается убедиться в существовании оптимального приближения $u^{(\Pi)}(x,\alpha_{i_0})$, наилучшим образом в смысле равенства (2.82) аппроксимирующего поле $v(x)$, искаженное погрешностями. Для этого определяем, ссылаясь на зависимость (2.83), функцию скалярного аргумента

$$f(\alpha)=\left\|u^{(\Pi)}(\alpha)-v\right\|^2=\frac{\alpha^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+q^2\omega^2)^2|v(\omega)|^2}{[1+\alpha(1+q^2\omega^2)]^2}d\omega$$

и находим, что ее производная

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+q^2\omega^2)^2|v(\omega)|^2}{[1+\alpha(1+q^2\omega^2)]^3}d\omega>0$$

строго положительна на луче $\alpha>0$. А это означает, что функция $f(\alpha)$ строго монотонно возрастающая, причем $f(0)=0$, и поэтому сомнений быть не может, что существует такое значение $\alpha=\alpha_{i_0}$ в последовательности $\{\alpha_n\}$, при котором выполняется равенство (2.82).

Сопоставляя выражения (2.81) и (2.83), видим, что они являются аналогами друг друга и поэтому в вычислительном плане алгоритмы, реализующие тот или другой способ сглаживания данных на дискретной сети, не будут существенно отличаться один от другого. В связи с этим аппарат сглаживания данных в задаче определения финитного контакта используется с успехом и при численном решении задачи (1.21).

2.7.4. Глобальный регуляризующий алгоритм определения ограниченной области. Задача определения границы $\rho(\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$, тела D, близкого к кругу D_0 радиуса $\rho>0$, сведена в [14] к построению последовательности $\{\zeta_m(\alpha)\}$ приближений
$\zeta_m(\alpha)$ границы $\zeta(\alpha)=\rho(\alpha)-\rho$ в виде решений последовательности интегральных уравнений первого рода (1.10). На основании теоремы 2.8 выводим, что точное решение $\zeta_m^{(\mathrm{T})}(\varphi)$ каждого уравнения последовательности (1.10) при точно заданной правой части $v_{\mathrm{T}}^{(m)}(\varphi)$ можно искать в виде разложения по собственным функциям оператора задачи с ядром $k(\alpha,\varphi;v)$, т. е., в виде

$$\zeta_m^{(\mathrm{T})}(\varphi)=\alpha_0^{(m,\mathrm{T})}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(m,\mathrm{T})}\cos k\varphi+\beta_k^{(m,\mathrm{T})}\sin k\varphi,$$

(2.84)

поскольку собственные функции оператора образуют базисы в подпространствах $V(A^*)$ и $V(A)$ гильбертова пространства $L^{(2)}[0,2\pi]$. В этой связи любой элемент $V(A)$, в том числе и $v_{\mathrm{T}}^{(m)}(\varphi)$, разлагается в абсолютно сходящийся ряд

$$v_{\mathrm{T}}^{(m)}(\varphi)=a_0^{(m,\mathrm{T})}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(m,\mathrm{T})}\cos k\varphi+b_k^{(m,\mathrm{T})}\sin k\varphi$$

и поэтому при наличии представления (2.30) легко находим,

$$\alpha_0^{(m,\mathrm{T})}=\frac{a_0^{(m,\mathrm{T})}}{2\pi(-\ln r)},\quad \alpha_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{ka_k^{(m,\mathrm{T})}}{\pi\nu^k},\quad \beta_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{kb_k^{(m,\mathrm{T})}}{\pi\nu^k}.$$

(2.85)

Однако, если попытаться использовать это решение в условиях, когда функция $v^{(m)}(\varphi)$ задана с погрешностями, то, как показано в [15], можно прийти к ложному результату (из-за сильной неустойчивости суммирования рядов Фурье с приближенно заданными коэффициентами). Практически *решение каждого уравнения последовательности (1.10) будем искать в виде минимизирующей последовательности для сглаживающего функционала, отвечающей определенному направлению параметра регуляризации.*

Переходя к реализации этого приема, отметим прежде всего, что вместо потенциала $u(\varphi, r)$ на окружности ∂K_r задано его приближение $u^{(n)}(\varphi) \equiv u^{(n)}(\varphi, r)$ в виде (2.74). Для удобства на будущее переобозначим коэффициенты (2.71) разложения (2.74) и перепишем его так

$$u^{(n)}(\varphi) = 2\pi(-\ln r)\rho A_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho \frac{\nu^k}{k} A_k \cos k\varphi,$$

(2.74)

где, по-прежнему, $\nu = \rho/r < 1$. Тогда правая часть первого в последовательности (1.10) уравнения, из которого определяется первое приближение

$$\zeta_1(\varphi) = \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(1)} \cos k\varphi + \beta_k^{(1)} \sin k\varphi,$$

будет, очевидно, следующей

$$v^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{\rho}\{u^{(n)}(\varphi) + \pi\rho^2 \ln r\} = \pi(-\ln r)(2A_0 - \rho) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu^k}{k} A_k \cos k\varphi.$$

Предполагая, что $(m-1)$-е приближение $\zeta_{m-1}(\varphi)$ границы $\zeta(\varphi)$ уже найдено, следующее, m-е приближение $\zeta_m(\varphi)$, ищем так. В заданной на окружности ∂K_r достаточно плотной равномерной сети точек φ_k с шагом $\Delta = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, определяем в соответствии с выражением (1.11) функцию

$$\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} f(\alpha - \varphi_j, \zeta_{m-1}; \rho, r)\, d\alpha \approx f^{(m)}(\varphi_j) =$$

$$= \frac{\Delta}{2\rho}\sum_{i=1}^{N}\left\{\zeta_{m-1}(\alpha_i)[\rho + r\cos(\alpha_i - \varphi_j)] + \zeta_{m-1}^2(\alpha_i)\left[\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{R(\alpha_i - \varphi_j; \rho, r)}\right] + \right.$$

$$+\left(r^2\cos 2(\alpha_i - \varphi_j) - \frac{[\rho + \zeta_{m-1}(\alpha_i)]^2}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{2s(\alpha_i, \varphi_j) + \zeta_{m-1}^2(\alpha_i)}{R^2(\alpha_i - \varphi_j; \rho, r)}\right) -$$

$$\left. - r^2\sin 2(\alpha_i - \varphi_j)\, arctg\frac{r\zeta_{m-1}(\alpha_i)\sin(\alpha_i - \varphi_j)}{R^2(\alpha_i - \varphi_j; \rho, r) + s(\alpha_i, \varphi_j)}\right\},$$

$$R(\alpha_i - \varphi_j; \rho, r) = \sqrt{\rho^2 - 2\rho r\cos(\alpha_i - \varphi_i) + r^2},$$

$$s(\alpha_i, \varphi_j) = \zeta_{m-1}(\alpha_i)[\rho - r\cos(\alpha_i - \varphi_j)], \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$

вычисляем приближения ее коэффициентов Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m)}(\varphi)\, d\varphi \approx a_0^{(m)} = \frac{\Delta}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} f^{(m)}(\varphi_i),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m)}(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi \approx a_k^{(m)} = \frac{\Delta}{\pi}\sum_{i=1}^{N} f^{(m)}(\varphi_i)\cos k\varphi_i,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m)}(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi \approx b_k^{(m)} = \frac{\Delta}{\pi}\sum_{i=1}^{N} f^{(m)}(\varphi_i)\sin k\varphi_i;$$

и определяем соответствующую правую часть уравнения в последовательности (1.10)

$$v^{(m)}(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi,$$

где, таким образом,

$$a_0 = \pi(-\ln r)(2A_0 - \rho) - a_0^{(m)}, \qquad a_k = \frac{v_k}{k} A_k - a_k^{(m)}, \qquad b_k = -b_k^{(m)}.$$

Вид m-го приближения $\zeta_m(\varphi)$, так же как и вид первого $\zeta_1(\varphi)$, определим с помощью проектирования точного решения $\zeta_m^{(\mathrm{T})}(\varphi)$ на $(2n+1)$-мерное евклидово пространство $\mathrm{E}^{(2n+1)}[0, 2\pi]$ и запишем

$$\zeta_m(\varphi) = \alpha_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)} \cos k\varphi + \beta_0^{(m)} \sin k\varphi,$$

а его оптимальные коэффициенты найдем среди элементов минимизирующей последовательности определенного сглаживающего функционала, отвечающей заданному направлению параметра регуляризации.

На множествах $K_{\Pi}^{(1)}(\Psi, c)$, $\Psi = \Omega_c, \Omega,$ рассмотрены три вида сглаживающих функционалов, а именно

$$\mathrm{T}_{CC}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi) = (\zeta_m, A\zeta_m - 2v^{(m)}) + \chi(\zeta_m, D\zeta_m),$$
$$\mathrm{T}_{CO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi) = (\zeta_m, A\zeta_m - 2v^{(m)}) + \chi(D\zeta_m, D\zeta_m),$$
$$\mathrm{T}_{OO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi) = \left\| A\zeta_m - v^{(m)} \right\|^2 + \chi(D\zeta_m, D\zeta_m),$$

где, напомним,

$$A\zeta_m = \int_0^{2\pi} k(\alpha, \varphi; v)\zeta_m(\alpha)d\alpha = 2\pi(-\ln r)\alpha_0^{(m)} + \pi\sum_{k=1}^{n} \frac{v^k}{k}(\alpha_k^{(m)} \cos k\varphi + \beta_k^{(m)} \sin k\varphi),$$

$$D\zeta_m = \alpha_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(m)} + qk\beta_k^{(m)}) \cos k\varphi + (\beta_k^{(m)} - qk\alpha_k^{(m)} \sin k\varphi).$$

Из условий минимума каждого из функционалов получаем соответственно

$$\alpha_0^{(m)}(\chi) = \frac{a_0}{2\pi(-\ln r) + \chi},$$

$$\alpha_k^{(m)}(\chi) = \frac{k\,a_k}{\pi v^k + \chi k},$$

(2.86)

$$\beta_k^{(m)}(\chi) = \frac{k\,b_k}{\pi v^k + \chi k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

для функционала $\mathrm{T}_{CC}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$;

$$\alpha_0^{(m)}(\chi) = \frac{a_0}{2\pi(-\ln r) + \chi},$$

$$\alpha_k^{(m)}(\chi) = \frac{k\,a_k}{\pi v^k + \chi k(1 + q^2 k^2)},$$

(2.87)

$$\beta_k^{(m)}(\chi) = \frac{k\,b_k}{\pi v^k + \chi k(1 + q^2 k^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

для функционала $\mathrm{T}_{CO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$; и, наконец,

$$\alpha_0^{(m)}(\chi) = \frac{2\pi(-\ln r)a_0}{[2\pi(-\ln r)]^2 + \chi},$$

$$\alpha_k^{(m)}(\chi) = \frac{\pi \nu k\, a_k}{(\pi \nu^k)^2 + \chi k^2 (1 + q^2 k^2)},$$

(2.88)

$$\beta_k^{(m)}(\chi) = \frac{\pi \nu k\, b_k}{(\pi \nu^k)^2 + \chi k^2 (1 + q^2 k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

для функционала $\mathrm{T}_{OO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$. Во всех трех случаях регуляризованные коэффициенты решения $\zeta_m(\varphi)$ при $\chi = 0$ тождественно равны абсолютно точным коэффициентам, т. е.

$$\alpha_0^{(m)}(0) = \alpha_0^{(m,\mathrm{T})}, \qquad \alpha_k^{(m)}(0) = \alpha_k^{(m,\mathrm{T})}, \qquad \beta_k^{(m)}(0) = \beta_k^{(m,\mathrm{T})}.$$

В то же время сложность вычисления регуляризованных значений коэффициентов возрастает в направлении от функционала $\mathrm{T}_{CC}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$ к функционалу $\mathrm{T}_{OO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$. Следовательно, в том же направлении уменьшается точность определения коэффициентов: коэффициенты (2.86) точнее коэффициентов (2.87), коэффициенты (2.87) точнее коэффициентов (2.88).

Оптимальные значения коэффициентов (2.86) или (2.87) определяются методом невязки в соответствии со следствием 2 теоремы 2.26 следующим образом. Задается убывающая последовательность $\{\chi_n\}$ значений параметра регуляризации, например, в виде убывающей геометрической прогрессии, и с помощью метода дихотомии отыскивается такое значение параметра $\chi = \chi_{k_0}$, чтобы выполнялось (приближенное) равенство

$$\left\| A\zeta_m(\chi_{k_0}) - v^{(m)} \right\| = \sqrt{N-1}\,\varepsilon,$$

где ε — средняя квадратическая мера погрешностей измерений. Если оптимальные коэффициенты

$$\alpha_0^{(m)} = \alpha_0^{(m)}(\chi_{k_0}), \qquad \alpha_k^{(m)} = \alpha_k^{(m)}(\chi_{k_0}), \qquad \beta_k^{(m)} = \beta_k^{(m)}(\chi_{k_0})$$

найдены таким способом, тогда составляется приближение $\zeta_m(\varphi)$ в виде отрезка ряда Фурье с полученными коэффициентами и вычисляется приближение функции

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(\alpha, \varphi, \zeta_m; \rho, r)\, d\alpha \approx \Phi^{(m)}(\varphi) =$$

$$= \frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ r\zeta_m(\alpha_k)\cos(\alpha_k - \varphi) + \frac{2\rho\zeta_m(\alpha_k) + \zeta_m^2(\alpha_k)}{2}\left[1 + \ln\frac{1}{R^2(\alpha_k - \varphi; \rho, r)}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(r^2\cos 2(\alpha_k - \varphi) - [\rho + \zeta_m(\alpha_k)]^2\right)\ln\left(1 + \frac{2s(\alpha_k, \varphi) + \zeta_m^2(\alpha_k)}{R^2(\alpha_k - \varphi; \rho, r)}\right) -$$

$$- r^2 \sin 2(\alpha_k - \varphi)\, arctg\, \frac{r\zeta_m(\alpha_k)\sin(\alpha_k - \varphi)}{R^2(\alpha_k - \varphi; \rho, r) + s(\alpha_k, \varphi)} \Bigg\},$$

определяющей [см (1.3)] потенциал “избыточного” по отношению к кругу D_0 тела $\Delta D = D \setminus D_0$ и находится величина уклонения

$$\Delta\Phi^{(m)} = \left\| \Phi^{(m)}(\varphi) - \rho\, v^{(1)}(\varphi) \right\|_{R^{(n)}}$$

вычисленного потенциала от “измеренного избыточного” поля. Если $\Delta\Phi^{(m)} \le \sqrt{N-1}\varepsilon$, то m-е приближение $\zeta_m(\varphi)$ границы $\zeta(\varphi)$ принимается в качестве окончательного решения задачи, если же $\Delta\Phi^{(m)} > \sqrt{N-1}\varepsilon$, то осуществляется переход к вычислению $m+1$-го приближения $\zeta_{m+1}(\varphi)$ границы тела ΔD по приведенной выше схеме вычисления m-го приближения $\zeta_m(\varphi)$ и т.д. и т.п.

2.7.5. Глобальный регуляризующий алгоритм определения финитного контакта. Переформулируем задачу (1.23) определения границы неограниченного тела D, близкого

к слою $D_C(h)$ постоянной толщины h, на случай пертурбации $\zeta(x)$ границы $h(x)=h+\zeta(x)$, $h=const$, на конечном интервале $(-L, L)$, $L<\infty$. В результате вместо (1.23) будем иметь задачу

$$\int_{-L}^{L} k(x,\zeta;h)\zeta_m(\xi)d\xi = v^{(m)}(x;h),$$

$$m=0,1,2,\dots,\infty; \qquad \zeta_0(x)=0;$$

(2.89)

$$k(x,\zeta;h)=\frac{1}{\pi}\frac{h}{h^2+(x-\xi)^2},$$

$$v^{(m)}(x;h)=u_2(x)-h-\int_{-L}^{L} f(x,\xi,\zeta_{m-1};h)d\xi,$$

$$f(x,\xi,\zeta_{m-1};h)=\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{[h+\zeta_{m-1}(\xi)]^2+(x-\xi)^2}{h^2+(x-\xi)^2}-\frac{2h}{h^2+(x-\xi)^2}\zeta_{m-1}(\xi)\right\}$$

при условии, что все приближения пертурбации “не выходят” на поверхность Земли, т. е., удовлетворяют неравенству

$$|\zeta_m(x)|<h.$$

(2.90)

Очевидно, что это условие не является слишком жестким при исследовании подземного рельефа.

Приступая к построению алгоритма решения задачи (2.89), заметим следующее. Если бы правая часть $v^{(m)}(x;h)$ уравнения в последовательности (2.89) была бы известна абсолютно точно, т. е., если бы в наличии имелось разложение

$$v_{\mathrm{T}}^{(m)}(x;h)=a_0^{(m,\mathrm{T})}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(m,\mathrm{T})}\cos\alpha kx+b_k^{(m,\mathrm{T})}\sin\alpha kx$$

с коэффициентами Фурье

$$a_0^{(m,\mathrm{T})}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}v_{\mathrm{T}}^{(m)}(x;h)dx, \qquad a_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}v_{\mathrm{T}}^{(m)}(x;h)\cos\alpha kxdx,$$

(2.91)

$$b_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}v_{\mathrm{T}}^{(m)}(x;h)\sin\alpha kxdx, \quad \alpha=\frac{\pi}{L},$$

то точное решение $\zeta_m^{(\mathrm{T})}(x)$ этого уравнения в классе (дифференцируемых) функций, представимых хорошо сходящимися рядами Фурье, можно было бы получить в виде

$$\zeta_m^{(\mathrm{T})}(x)=\alpha_0^{(m,\mathrm{T})}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(m,\mathrm{T})}\cos\alpha kx+\beta_k^{(m,\mathrm{T})}\sin\alpha kx,$$

где

$$\alpha_0^{(m,\mathrm{T})}=\frac{a_0^{(m,\mathrm{T})}}{2L}, \quad \alpha_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{a_k^{(m,\mathrm{T})}}{Le^{-\alpha kh}}, \quad \beta_k^{(m,\mathrm{T})}=\frac{b_k^{(m,\mathrm{T})}}{Le^{-\alpha kh}}.$$

(2.92)

Однако, это решение нельзя использовать для практических целей из-за значительной неустойчивости решения по отношению к погрешностям входных данных (которая была проиллюстрирована примерами в [15]. Поэтому будем искать регуляризованные приближения решений последовательности (2.89).

Решение задачи (2.89) определим на цепочке (конечномерных) компактов

$$\mathrm{T}_1\subset\mathrm{T}_3\subset\dots\subset\mathrm{T}_{2n+1}\subset\dots\subset\mathrm{T}\subseteq K_{\mathrm{H}}^{(1)}(\Omega,c),$$

(2.93)

порожденных системой

$$\{1, \quad \cos\alpha kx, \sin\alpha kx\}$$

собственных функций ядра $k(x, \xi; h)$. Для определения первого приближения

$$\zeta_1(x) = \alpha_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(1)} \cos\alpha kx + \beta_k^{(1)} \sin\alpha kx, \quad m \le n,$$

контакта мы имеем вместо точно заданной производной потенциала $u_2(x)$ ее приближение,

$$u^{(n)}(x) = a_0^* + \sum_{k=1}^{n} a_k^* \cos\alpha kx + b_k^* \sin\alpha kx,$$

полученное в результате сглаживания (одним из предложенных способов) данных наблюдений. В связи с этим правая часть уравнения (2.89) для определения $\zeta_1(x)$ будет иметь вид

$$v^{(1)}(x) = a_0^* - h + \sum_{k=1}^{n} a_k^* \cos\alpha kx + b_k^* \sin\alpha kx,$$

поскольку $f(x, \xi, \zeta_0; h) \equiv 0$ для любого $\xi \in (-L, L)$.

Предположим, что $(m-1)$-е приближение $\zeta_{m-1}(x)$ пертурбации $\zeta(x)$ контакта уже построено. Тогда следующее m-е приближение $\zeta_m(x)$, конструируем так. В равномерной сети точек x_k с шагом $\Delta = x_{k+1} - x_k$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, определяем в соответствии с представлением (2.89) приближение $f^{(m)}(x)$ функции

$$\int_{-L}^{L} f(x_i, \xi, \zeta_{m-1}; h) d\xi \approx f^{(m)}(x_i) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \ln \frac{[h + \zeta_{m-1}(\xi_j)]^2 + (x_i - \xi_j)^2}{h^2 + (x_i - \xi_j)^2} - \frac{2h}{h^2 + (x_i - \xi_j)^2} \zeta_{m-1}(\xi_j) \right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N;$$

далее вычисляем приближения ее коэффициентов Фурье

$$a_0^{(m)} = \frac{\Delta}{2L} \sum_{j=1}^{n} f^{(m)}(x_j),$$

$$a_k^{(m)} = \frac{\Delta}{L} \sum_{j=1}^{n} f^{(m)}(x_j) \cos\alpha kx_j,$$

(2.94)

$$b_k^{(m)} = \frac{\Delta}{L} \sum_{j=1}^{n} f^{(m)}(x_j) \sin\alpha kx_j$$

и находим правую часть m-го уравнения последовательности (2.89)

$$v^{(m)}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\alpha kx + b_k \sin\alpha kx,$$

где $a_0 = a_0^* - h - a_0^{(m)}$, $a_k = a_k^* - a_k^{(m)}$, $b_k = b_k^* - b_k^{(m)}$. Вид m-го приближения $\zeta_m(x)$, так же как и вид первого в последовательности приближения $\zeta_1(x)$, определим с помощью проектирования точного решения $\zeta_m^{(\mathrm{T})}(x)$ на $(2n+1)$-мерный компакт T_{2n+1} цепочки (2.93) и в результате получим

$$\zeta_m(x) = \alpha_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)} \cos\alpha kx + \beta_k^{(m)} \sin\alpha kx.$$

Оптимальные коэффициенты представления $\zeta_m(x)$ находим среди элементов минимизирующей последовательности $\{\zeta_m^{(\chi)}(x)\}$, отвечающей убывающему (например, по закону геометрической прогрессии) направлению $\{\chi_k\}$ параметра регуляризации, для сглаживающего функционала Тихонова

$$\mathrm{T}_{CO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi) = (\zeta_m, A\zeta_m - 2v^{(m)}) + \chi(D\zeta_m, D\zeta_m)$$

над множеством $K_{\mathrm{H}}^{(1)}(\Omega, c)$. В выражении функционала $\mathrm{T}_{CO}(\zeta_m, v^{(m)}; \chi)$ согласно утверждению теоремы 2.8

$$A\zeta_m = 2L\alpha_0^{(m)} + L\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha kh}(\alpha_k^{(m)}\cos\alpha kx + \beta_k^{(m)}\sin\alpha kx)$$

и в связи с определением дифференциального оператора D

$$D\zeta_m = \alpha_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^{(m)} + \alpha qk\beta_k^{(m)})\cos\alpha kx + (\beta_k^{(m)} - \alpha qk\alpha_k^{(m)})\sin\alpha kx.$$

Из условий минимума сглаживающего функционала находим с учетом полученных выражений

$$\alpha_0^{(m)}(\chi) = \frac{a_0}{2L + \chi},$$

$$\alpha_k^{(m)}(\chi) = \frac{a_k}{Le^{-\alpha kh} + \chi(1 + \alpha^2 q^2 k^2)},$$

$$\beta_k^{(m)}(\chi) = \frac{b_k}{Le^{-\alpha kh} + \chi(1 + \alpha^2 q^2 k^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Сравнивая полученные выражения коэффициентов с точными их значениями (2.92), видим, что они совпадают с точными при $\chi = 0$, т. е. $\alpha_0^{(m)}(0) = \alpha_0^{(m,\mathrm{T})}$, $\alpha_k^{(m)}(0) = \alpha_k^{(m,\mathrm{T})}$ и $\beta_k^{(m)}(0) = \beta_k^{(m,\mathrm{T})}$. Оптимальное значение параметра регуляризации $\chi = \chi_{i_0}$, обеспечивающее точность вычисления решения, сопоставимую с точностью исходных данных, находим из уравнения

$$\left\| A\zeta_m(\chi) - v^{(m)} \right\| = \sqrt{N-1}\varepsilon. \tag{2.95}$$

Однозначная разрешимость этого уравнения вытекает из следствия 2 теоремы 2.26. Впрочем, не составляет большого труда убедиться в этом и непосредственно, подставив значения регулярных коэффициентов в выражение невязки. В результате получим функцию скалярного аргумента

$$f_{CO}(\chi) = \left\| A\zeta_m(\chi) - v^{(m)} \right\|^2 = L\chi^2 \left\{ \frac{2a_0^2}{(2L+\chi)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+\alpha^2 q^2 k^2)^2 (a_k^2 + b_k^2)}{[Le^{-\alpha kh} + \chi(1+\alpha^2 q^2 k^2)]^2} \right\},$$

которая, очевидно, удовлетворяет условию $f_{CO}(0) = 0$. А так как при $\chi > 0$

$$\frac{\partial f_{CO}(\chi)}{\partial \chi} = 2L^2\chi \left\{ \frac{4a_0^2}{(2L+\chi)^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{Le^{-\alpha kh}(1+\alpha^2 q^2 k^2)(a_k^2 + b_k^2)}{[Le^{-\alpha kh} + \chi(1+\alpha^2 q^2 k^2)]^3} \right\} > 0,$$

то функция $f_{CO}(\chi)$ строго монотонно возрастает. Поэтому существует единственное значение параметра χ, удовлетворяющее условие (2.95). Другими словами, уравнение (2.95) относительно параметра χ разрешимо однозначно и вычисляется дихотомией.

После определения оптимальных коэффициентов $\alpha_0^{(m)} = \alpha_0^{(m)}(\chi_{i_0})$, $\alpha_k^{(m)} = \alpha_k^{(m)}(\chi_{i_0})$, $\beta_k^{(m)} = \beta_k^{(m)}(\chi_{i_0})$ составляется приближение $\zeta_m(x)$ в виде отрезка ряда Фурье, находится приближение $f^{(m+1)}(x)$ функции

$$\int_{-L}^{L} f(x_i, \xi, \zeta_m; h)d\xi \approx f^{(m+1)}(x_i) = \frac{\Delta}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\left\{ \ln\frac{[h+\zeta_m(\xi_j)]^2 + (x_i - \xi_j)^2}{h^2 + (x_i - \xi_j)^2} - \frac{2h}{h^2 + (x_i - \xi_j)^2}\zeta_m(\xi_j) \right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N;$$

и вычисляется функционал

$$\Delta v^{(m)} = \left\| v^{(1)} - f^{(m+1)} \right\|_{R^{(n)}}.$$

Если $\Delta v^{(m)} \le \sqrt{N-1}\varepsilon$, то m-е приближение $\zeta_m(x)$ контакта $\zeta(x)$ принимается в качестве окончательного решения задачи (2.89). Если же $\Delta v^{(m)} > \sqrt{N-1}\varepsilon$, то осуществляется переход к вычислению $(m+1)$-го приближения $\zeta_{m+1}(x)$ по предложенной схеме вычисления приближения $\zeta_m(x)$.

В разработанной процедуре определения контакта самой ответственной и наиболее трудоемкой является операция вычисления функционалов типа (2.94), дающих приближение коэффициентов Фурье вида (2.91) всех разложений, включая и соответствующие представления данных наблюдений.

При реализации процесса приближений прослеживается выполнение условия (2.90). Если оно не выполняется, то пересматривается гипотеза относительно оценки погрешностей измерений. Если данных об улучшении этой оценки нет, то на основании не выполнения условия (2.90) делается вывод о невозможности получения решения задачи с точностью, сопоставимой с погрешностями входных данных.

2.7.6. Глобальный регуляризующий алгоритм решения задачи (1.23). Алгоритм решения задачи (1.23) строится в предположении, что приближение $v(x)$ поля $u_2(x)$ задано вдоль достаточно длинного профиля, (практически на оси $R^{(1)}$) и что операция сглаживания наблюдений уже проведена, т. е. получено приближение

$$u(x) = u(x, \alpha_{i_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)e^{i\omega x}}{1+\alpha_{i_0}(1+q^2\omega^2)}d\omega, \tag{2.96}$$

где α_{i_0} — оптимальное значение параметра регуляризации.

Перепишем задачу (1.23) в образах Фурье. Для этого вычислим преобразование Фурье следующих функций

$$w(x) = u(x) - h,$$

$$y^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{[h+\zeta_{m-1}(\xi)]^2 + (x-\xi)^2}{h^2 + (x-\xi)^2}d\xi,$$

$$z^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + (x-\xi)^2}\zeta_{m-1}(\xi)d\xi.$$

В результате получим в образах Фурье

$$w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,e^{-i\omega x}dx,$$

$$y^{(m)}(\omega) = e^{-|\omega|h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-|\omega|\zeta_{m-1}(\xi)}}{|\omega|}e^{-i\omega\xi}d\xi,$$

$$z^{(m)}(\omega) = \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|h|},$$

что дает возможность сразу же определить из заданной последовательности (1.23) абсолютно точный образ $\zeta_m(\omega)$ приближения $\zeta_m(x)$ по точным значениям образа $w(\omega)$ поля $w(x)$ в виде

$$\zeta_m(\omega) = w(\omega)e^{|\omega|h} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-|\omega|\zeta_{m-1}(\xi)}}{|\omega|}e^{-i\omega\xi}d\xi + \zeta_{m-1}(\omega). \tag{2.97}$$

Этот образ приближения $\zeta_m(x)$, как в предыдущих случаях точные значения коэффициентов Фурье (2.85) и (2.91) последовательных приближений решения задач (1.10) и (2.89) соответственно, не может использоваться для практических целей из-за

сильной неустойчивости, но вполне пригоден служить (как и его предшественники) *критерием адекватности* ориентировки *процесса регуляризации* решения.

Оптимальный образ приближения $\zeta_m(x)$ будем искать среди элементов минимизирующей последовательности $\{\zeta_m(\omega;\chi_i)\}$, отвечающей убывающему направлению $\{\chi_i\}$ параметра χ, для сглаживающего функционала

$$\mathrm{T}_{CO}(\zeta_m, v^{(m)};\chi) = (\zeta_m, A\zeta_m - 2v^{(m)}) + \chi(D\zeta_m, D\zeta_m),$$

в котором соответствующие символы имеют следующий смысл

$$(\zeta_m, A\zeta_m - 2v^{(m)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|h}\,\zeta_m(\omega)\overline{\{\zeta_m(\omega) - 2[w(\omega)e^{|\omega|h} - \eta(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)]\}}d\omega,$$

$$\eta(\omega) = y^{(m)}(\omega)e^{|\omega|h} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-|\omega|\zeta_{m-1}(\xi)}}{|\omega|}e^{-i\omega\xi}d\xi,$$

(2.98)

$$(D\zeta_m, D\zeta_m) = \int_{-\infty}^{\infty}(1+q^2\omega^2)\zeta_m(\omega)\overline{\zeta_m(\omega)}d\omega.$$

В выписанных выражениях (2.98) тильдой над соответствующим соотношением отмечена комплексно сопряженная величина.

Из условий минимума функционала с учетом разъяснений (2.98) находим

$$\zeta_m(\omega;\chi) = \frac{w(\omega) - y^{(m)}(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|\omega|h}}{e^{-|\omega|h} + \chi(1+q^2\omega^2)}$$

(2.99)

и сопоставлением полученного выражения (2.99) с равенством (2.97) убеждаемся, что регуляризованный образ $\zeta_m(\omega;\chi)$ совпадает с точным $\zeta_m(\omega)$ при $\chi = 0$. Оптимальное значение параметра регуляризации $\chi = \chi_{i_0}$ определяем из условия

$$\left\| A\zeta_m(\chi) - v^{(m)} \right\| = \sqrt{N-1}\varepsilon,$$

где, разумеется,

$$f_{CO}(\chi) = \left\| A\zeta_m(\chi) - v^{(m)} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\omega|h}\,\zeta_m(\omega;\chi)\overline{\zeta_m(\omega;\chi)}d\omega -$$

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|h}\,\zeta_m(\omega;\chi)\overline{[w(\omega) - y^{(m)}(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|\omega|h}]}d\omega +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left|w(\omega) - y^{(m)}(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|\omega|h}\right|^2 d\omega,$$

а с подстановкой (2.99) —

$$f_{CO}(\chi) = \chi^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|w(\omega) - y^{(m)}(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|\omega|h}\right|^2}{[e^{-|\omega|h} + \chi(1+q^2\omega^2)]^2}d\omega.$$

Отсюда при $\chi > 0$ легко вычисляем

$$\frac{\partial f_{CO}(\chi)}{\partial\chi} = \chi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|\omega|h}\left|w(\omega) - y^{(m)}(\omega) + \zeta_{m-1}(\omega)e^{-|\omega|h}\right|^2}{[e^{-|\omega|h} + \chi(1+q^2\omega^2)]^3}d\omega > 0$$

и утверждаемся в том, что функция $f_{CO}(\chi)$ скалярного аргумента $\chi > 0$ строго монотонно возрастает и удовлетворяет очевидному условию $f_{CO}(0) = 0$. Итак, из приведенных рассуждений так же, как из следствия 2 теоремы 2.26, неизбежно вытекает,

что существует единственное значение параметра регуляризации $\chi = \chi_{i_0}$, определяемое методом дихотомии, которое обеспечивает поиск оптимального образа $\zeta_m(\omega) = \zeta_m(\omega; \chi_{i_0})$ решения $\zeta_m(x)$ m-го уравнения последовательности (1.23).

После отыскания m-го оптимального приближения образа $\zeta_m(\omega)$ вычисляется порог

$$\Delta v^{(m)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| w(\omega) - y^{(m+1)}(\omega) + \zeta_m(\omega) e^{-|\omega| h} \right|^2 d\omega$$

и производится сравнение порога с погрешностями входных данных. Если $\Delta v^{(m)} \leq (N-1)\varepsilon^2$, то m-е приближение

$$\zeta_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_m(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

принимается в качестве окончательного решения задачи, если же $\Delta v^{(m)} >> (N-1)\varepsilon^2$, то поиск $(m+1)$-го приближения продолжается по схеме определения m-го.

Предложенный способ определения контакта страдает одним существенным недостатком, состоящим в том, что для его реализации требуются данные наблюдений поля на “длинных профилях”. Ниже рассматривается возможный вариант улучшения этого способа. Он состоит в том, что для отыскания приближений контакта вместо последовательностей уравнений (1.23) с медленно убывающими ядрами Пуассона используются модифицированные последовательности интегральных уравнений с быстро убывающими ядрами Шварца [93].

Модификация последовательности (1.23) осуществляется так. Наряду с приближением $\zeta_m(x)$ контакта $\zeta(x)$, которое на будущее обозначается через $\zeta^-_m(x)$, рассматривается расположенное симметрично относительно оси $0x$ “сглаженное” приближение

$$\zeta^+_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + (x-\zeta)^2} v^{(m)}(\xi) d\xi$$

контакта $\zeta(x)$. А так как образы этих приближений определяются в виде

$$\zeta^+_m(\omega) = v^{(m)}(\omega)\, e^{-|\omega| h},$$
$$\zeta^-_m(\omega) = v^{(m)}(\omega)\, e^{|\omega| h},$$

то, следовательно,

$$v^{(m)}(x) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^-_m(\xi)}{ch\dfrac{\pi(\xi - x)}{2h}} d\xi + \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^+_m(\xi)}{ch\dfrac{\pi(\xi - x)}{2h}} d\xi.$$

Введем обозначение

$$w^{(m)}(x; h) = v^{(m)}(x) - \frac{1}{4\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x, \xi; h) v^{(m)}(\xi) d\xi, \tag{2.100}$$

где, как нетрудно видеть,

$$k_1(x, \xi; h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ch\dfrac{\pi(\eta - x)}{2h}} \cdot \frac{h}{h^2 + (\eta - \xi)^2} d\eta.$$

Следовательно, ядро преобразования (2.100) убывает на бесконечности значительно быстрее ядра Пуассона. В связи с этим, если вместо последовательности (1.23) использовать модифицированную последовательность

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_0(x,\xi;h)\zeta^{-}_{m}(\xi)d\xi = w^{(m)}(x;h),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \infty; \quad \zeta^{-}_{0}(x) = 0,$$

(2.101)

$$k_0(x,\xi;h) = \frac{1}{4h}\frac{1}{ch\frac{\pi(\xi - x)}{2h}},$$

$$v^{(1)}(x) = u(x) - h, \quad \int_{-\infty}^{\infty}(u(x) - h)dx = 0,$$

то поиск контакта в образах Фурье из сугубо теоретических рассмотрений переносится в практическую плоскость. Для реализации метода используются квадратурные формулы для численного интегрирования быстро осциллирующих функций на конечных интервалах. Конечные интервалы интегрирования выражений типа (2.96), (2.98) и (2.101) выбираются так, чтобы оценки отброшенных остатков составляли доли погрешностей измерений поля.

3. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ УСЛОВИИ ЗАДАНИЯ ПОЛЯ НА КОРОТКОМ ИНТЕРВАЛЕ

Предлагаемая разработка является продолжением серии статей [94-102], в которых проведено главным образом теоретическое исследование обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности $\zeta(x), x \in \mathbb{R}^{(1)}$, а вопросы прикладного аспекта не поднимались вовсе или обсуждались, как, например, в [101], с недостаточной полнотой. Особенностью теоретического исследования явилось редуцирование задачи к решению нелинейного интегрального уравнения типа Урысона

$$\zeta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}d\xi = u(x),$$

(3.1)

которое выведено на основании фундаментальной зависимости между тяготеющими массами и порожденным ими (калиброванным [94]) полем $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^{(1)}$, и которое в отличие от уравнений, полученных в свое время другими исследователями, имеет вид интегрального уравнения “второго рода” с неизвестной функцией не только под знаком интеграла, но и вне его. Как хорошо известно [89, 103, 104], интегральные уравнения второго рода в отличие от уравнений первого рода однозначно разрешимы, если они линейны и фредгольмовы. И хотя понятия “уравнения второго рода” по отношению к нелинейным интегральным уравнениям нет, тем не менее придание нелинейному уравнению для контакта вида уравнения второго рода (с неизвестной функцией и под знаком интеграла и вне его) во многом способствовало выбору направления его исследования. В этом представлении уравнение оказалось доступным для изучения условий существования и устойчивости его решения элементарными средствами. Более того, видом уравнения был определен и сам способ его решения, базирующийся на доминанте внеинтегральной компоненты. Для выяснения условий существования и устойчивости решений уравнения прежде всего исследованы свойства оператора уравнения

$$A(\zeta;x) = \zeta(x) - B(\zeta;x),$$

$$B(\zeta;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}d\xi.$$

(3.2)

Исследование свойств оператора проведено при весьма либеральном подходе к функционально-аналитическому оснащению задачи. В результате выяснено, что оператор прямой задачи $A(\zeta; x)$ является вполне непрерывным с незамкнутой областью значений, и его обратный оператор в общем случае неограниченный. Как следствие этого, задача решения уравнения (3.1) оказывается, вообще говоря, неустойчивой и характеризуется отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. В то же время на образе страховского множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, $\alpha > 0$, оператор $A(\zeta; x)$ однозначно обратим и устойчив. Поэтому при решении задачи центральной становится проблема оконтуривания множества корректности с принадлежащим ему решением уравнения. В данном конкретном случае решение этой проблемы упрощается и осуществляется без привлечения какой-либо дополнительной информации на основании одного только исходного представления уравнения (3.1). Его вид дает возможность построить практически для всех случаев, наиболее важных с точки зрения приложений, такую последовательность компактных операторов, которая, с одной стороны, достаточно хорошо аппроксимирует неограниченный обратный оператор задачи, а с другой, — сходится на определенном элементе к точному решению уравнения. Такова, по сути простая, стратегия поиска решения обратной задачи для контактной поверхности, сведенной к нелинейному интегральному уравнению вида (3.1) при абсолютно точном задании оператора уравнения и его правой части. Однако, уже при невысоком уровне помех вследствие незамкнутости области значений прямого отображения задачи и неограниченности обратного стратегию поиска решения приходится изменять в соответствии с развитой теорией решения некорректно поставленных задач [56, 58, 59, 69].

3.1. Определения множеств входных данных. Поясним прежде всего, что подразумевается в дальнейшем под «практически неограниченным интервалом». Пусть для поставленной геологами задачи требуется определить фрагмент контактной поверхности $\zeta(x)$ (в дискретной сети точек x_k, расположенных равномерно с шагом Δx) на интервале $[c_1, c_2]$ по значениям поля $u(x)$, заданным на интервале $[c_0, c]$. Примем, что отрезок $[c_1, c_2]$ (со множеством точек x_k его разбиения) является собственным подмножеством интервала $[c_0, c]$, т. е., что $[c_1, c_2] \subset [c_0, c]$. При решении задачи будем исходить из реальной ситуации, когда значения поля на пунктах наблюдений измерены с точностью до δ, т.е., когда вместо значений функции $u(x)$ на сетке узлов x_k интервала [c_0, c] заданы значения функции $u_\delta(x)$ и выполняется неравенство $\| u(x) - u_\delta(x) \| \le \delta$. Для определения приближения фрагмента контакта $\zeta(x)$, $x \in [c_1, c_2]$, например, при помощи предложенного в [101, 102] итерационного процесса, необходимо располагать данными о поле на интервале $(-a_m + c_1, \;\; c_2 + a_m)$. Здесь в обозначении интервала число a_m означает длину «полуинтервала» интегрирования при аппроксимации оператора $A(\zeta; x)$ (ставящего в соответствие полю $u(x)$, $x \in [c_0, c]$, функцию $\zeta(x), x \in \mathbb{R}^{(1)}$, с неограниченным носителем) оператором $A_m(\zeta; x)$ (с помощью которого тому же полю $u(x)$ отвечает та же функция $\zeta(x)$, но уже с конечномерным носителем, принадлежащим интервалу $[-a_m + c_1, c_2 + a_m] < \infty$), выполняемой с погрешностью

$$\sigma(x; a_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_m}^{\infty} \left\{ \ln \frac{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(x)} + \ln \frac{(\xi + x)^2 + \zeta^2(-\xi)}{(\xi + x)^2 + \zeta^2(x)} \right\} d\xi \, .$$

Если при этом интервал $(-a_m + c_1, \;\; c_2 + a_m)$ будет собственным подынтервалом интервала $[c_0, c]$, то последний будем называть “практически неограниченным”. Если же

$[c_0, c] \subset (-a_m + c_1, \quad c_2 + a_m)$, то интервал $[c_0, c]$ будем называть существенно коротким. Ясно, что итерационный процесс, описанный в [101, 102], для определения $\zeta(x)$, $x \in [c_1, c_2]$, можно реализовать с достаточной надежностью только при наличии поля $u_\delta(x)$ на практически неограниченном интервале. Если же $u_\delta(x)$ задана на существенно коротком интервале, то для нахождения приближений контакта нужно применять другие схемы вычисления. Одну из таких схем мы сейчас и рассмотрим.

3.2. Регуляризующие алгоритмы приближенного решения задачи. Пусть входные данные $u_\delta(x)$ задачи для контактной поверхности известны на коротком интервале и нет возможности построить приближение $A_m(\zeta; x)$ оператора $A(\zeta; x)$ прямой задачи с достаточно высокой точностью. Тогда для решения задачи приходится использовать методы, отличные от способа последовательных приближений [101, 102], который в этой ситуации не позволяет найти хорошее приближение решения из-за быстрого накопления погрешностей при переходе от одной итерации к другой. Перспективными в этом отношении могут оказаться, по-видимому, только такие методы, которые, с одной стороны, отличаются повышенной устойчивостью, а, с другой — обеспечивают вычисление более быстро сходящихся последовательностей по сравнению с рассмотренными в [101, 102] приближениями.

Остановимся в этой связи на методе регуляризации А. Н. Тихонова и переформулируем нашу задачу следующим образом. Пусть $\Omega(\zeta)$ — некоторый непрерывный неотрицательный выпуклый функционал, достигающий своей точной нижней грани на множестве $St^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$. Конкретный его вид мы обрисуем впоследствии. Задачу решения интегрального уравнения для контактной поверхности с приближенно заданным оператором и с правой частью, не принадлежащей образу множества $St^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$, можем сформулировать в виде

$$\zeta(x; m; \delta) = \arg\inf \left\{ \Omega(\zeta) : \left\| A_m(\zeta; x) - u_\delta(x) \right\| \le \delta \right\},$$

т.е. в виде поиска такого приближения $\zeta(x; m; \delta)$ решения уравнения (3.1), которое минимизирует стабилизатор задачи $\Omega(\zeta)$ и обеспечивает выполнение неравенства $\left\| A_m(\zeta; x) - u_\delta(x) \right\|_{☹^{(2)}(-c,c)} \le \delta$, вычисленного, например, в норме гильбертова пространства $☹^{(2)}(-c, c)$, если мера погрешности $\sigma(x)$, с которой задана функция $u_\delta(x) = u(x) + \sigma(x)$, $x \in [-c, c]$, известна в виде $\delta = \left\| \sigma(x) \right\|_{☹^{(2)}(-c,c)}$.

Таким образом, задача для контактной поверхности сведена к задаче на безусловный минимум сглаживающего тихоновского функционала

$$T^\alpha[\zeta; u; \delta] = \left\| A_m(\zeta; x) - u_\delta(x) \right\|^2_{☹^{(2)}(-c,c)} + \alpha\Omega(\zeta),$$

в котором параметр регуляризации $\alpha > 0$ определяется той его экстремалью $\zeta(x; m; \alpha_0; \delta)$ из последовательности $\{\zeta(x; m; \alpha; \delta)\}$, которая удовлетворяет требованию

$$\left\| A_m(\zeta; x) - u_\delta(x) \right\|_{☹^{(2)}(-c,c)} \le \delta.$$

Условие безусловного минимума

$$grad\ T^\alpha[\zeta, u, \delta] = 0 \tag{3.3}$$

приведет к вполне определенному функциональному (интегро-дифференциальному) уравнению Эйлера, решение которого при каждом фиксированном значении параметра α является экстремалью сглаживающего функционала А. Н. Тихонова.

Полученное таким путем уравнение Эйлера будет содержать, как известно, сложного

вида операторы, которые при реализации вычислений на ЭВМ выражают в виде произведений представляющих их матриц довольно крупных размеров. При перемножении на ЭВМ матриц больших размеров точность их элементов может ухудшиться, что в конечном счете может в значительной мере исказить результат вычислений. Поэтому имеет смысл так определить на подготовительном этапе уравнение Эйлера, чтобы при конечномерном его проектировании не требовалось дополнительного перемножения матриц большого размера. Этого можно добиться, если уравнение Эйлера строить с самого начала, исходя из точного представления оператора, и лишь впоследствии заменить его приближенным.

Итак, будем считать, что в условии (3.3) безусловного минимума функционала $T^{\alpha}[\zeta, u, \delta]$ оператор $A(\zeta;\, x)$ задан точно. Тогда будем иметь

$$grad \, \| A(\zeta\,;\, x) - u_{\delta}(x) \|^2 = 2[A'_{\zeta}(\zeta)]^* (A(\zeta;\, x) + A'_{\zeta}(\zeta)\eta(x) - u_{\delta}(x)),$$

где $[A'_{\zeta}(\zeta)]^*$ — линейный оператор, сопряженный к линейному оператору $A'_{\zeta}(\zeta)$ в смысле выполнения равенства (скалярных произведений)

$$\langle A'_{\zeta}(\zeta)\eta,\, \tau \rangle = \langle \eta,\, [A'_{\zeta}(\zeta)]^* \tau \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tau(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\xi)}{\zeta^2(\xi) + (\xi - x)^2}\eta(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\xi)}{\zeta^2(\xi) + (\xi - x)^2}\tau(x)dx\,.$$

Следовательно,

$$A'_{\zeta}(\zeta)\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\xi)}{\zeta^2(\xi) + (\xi - x)^2}\eta(\xi)d\xi\,,$$

$$[A'_{\zeta}(\zeta)]^* \tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (x - \xi)^2}\tau(\xi)d\xi\,.$$

Линейный оператор $A'_{\zeta}(\zeta)$, зависящий от $\zeta\,(x)$, является производной по переменной ζ в смысле Фреше нелинейного оператора прямой задачи.

3.2.1. Преобразования операторов задачи. Вычислим произведения $[A'_{\zeta}(\zeta)]^* A(\zeta;\, x)$, $[A'_{\zeta}(\zeta)]^* A'_{\zeta}(\zeta)\eta(x)$ и $[A'_{\zeta}(\zeta)]^* u_{\delta}(x)$ и учтем, что $\zeta\,(x)$ под интегралом в выражении $A(\zeta;\, x)$ играет роль параметра. Будем иметь

$$[A'_{\zeta}(\zeta)]^* A(\zeta;\, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (x - \zeta)^2}\zeta(\xi)d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta\,(x)}{\zeta^2(x) + (x - \xi\,)^2}\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(t - \xi\,)^2 + \zeta^2(\xi\,)}{(t - \xi\,)^2 + \zeta^2(t)}\,dt \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta\,(x)}{\zeta^2(x) + (x - \xi\,)^2}\left\{\zeta\,(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(t - \xi\,)^2 + \zeta^2(x)}{(t - \xi\,)^2 + \zeta^2(t)}\,dt\right\} d\xi\,. \qquad (3.4)$$

$$[A'_{\zeta}(\zeta)]^* A_{\zeta}(\zeta)\eta(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (x - \xi)^2}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(t)}{\zeta^2(t) + (t - \xi)^2}\eta(t)dt\,, \qquad (3.5)$$

$$[A'_{\zeta}(\zeta)]^* u_{\delta}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x) + (x - \xi)^2}u_{\delta}(\xi)d\xi\,.$$

(3.6)

Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(x-\xi)^2}\ \ln\frac{(t-\xi)^2+k^2}{(t-\xi)^2+m^2}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(t-\xi)^2+k^2}{(t-\xi)^2+m^2}d\xi\int_0^{\infty}e^{-\omega h}\cos\omega(x-\xi)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\omega h}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(t-\xi)^2+k^2}{(t-\xi)^2+m^2}\cos\omega\,(x-\xi)\,d\xi=\ln\frac{(x-t)^2+(k+h)^2}{(x-t)^2+(m+h)^2},$$

а также

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(x-\xi)^2}\cdot\frac{k}{k^2+(t-\xi)^2}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\omega h}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2+(t-\xi)^2}\cos\omega\,(x-\xi)\,d\xi=\frac{k+h}{(k+h)^2+(x-t)^2},$$

то выражения (3.4) и (3.5) можно переписать соответственно в виде

$$[A'(\zeta)]^*A_\zeta(\zeta;x)=\zeta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(x)]^2}{(x-\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(\xi)]^2}d\xi, \qquad (3.7)$$

$$[A'(\zeta)]^*A'(\zeta)\eta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)+\zeta(\xi)}{[\zeta(x)+\zeta(\xi)]^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi)d\xi. \qquad (3.8)$$

Здесь и в дальнейшем вместо $A'_\zeta(\zeta)$ мы обозначили производную по Фреше оператора $A(\zeta;x)$ через $A'(\zeta)$, не опасаясь недоразумений, поскольку само обозначение $A'(\zeta)$ дает представление о зависимости оператора A' от (одной) переменной ζ.

Итак, мы получили выражения операторов $[A'(\zeta)]^*A(\zeta;x)$ и $[A'(\zeta)]^*A'(\zeta)\eta(x)$ в более простом виде нежели представления (3.4) и (3.5), которые (или им подобные) обычно используют при вычислениях и которые неизбежно приводят к необходимости перемножать матрицы большой размерности. В то же время представления (3.7) и (3.8) в виде однократных интегралов к такой необходимости не приводят. Поэтому можно надеяться, что при одних и тех же условиях точность конечномерной аппроксимации операторов, представленных в виде (3.7) и (3.8), будет выше точности аппроксимации тех же операторов, выраженных формулами (3.4) и (3.5). Повышение точности аппроксимации должно произойти не только в связи с тем, что при реализации формул (3.7) и (3.8) удается избежать перемножения матриц большой размерности, но и главным образом в связи с заменой этой операции ей неэквивалентной операцией интегрирования по всей числовой оси.

Получив в удобном виде представления операторов $[A'_\zeta(\zeta)]^*A(\zeta;x)$ и $[A'_\zeta(\zeta)]^*A'_\zeta(\zeta)\eta(x)$, участвующих в выражении градиента функционала невязки, конкретизируем в условии (3.3) вид градиента стабилизирующего функционала. Поскольку неотрицательный выпуклый функционал $\Omega(\zeta)$ должен по условию достигать точной нижней грани на $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, то его можно взять в виде

$$\Omega(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\{p(x)\,\zeta^2(x)+g(x)\,[D\zeta(x)]^2\}dx,$$

где D — оператор дифференцирования, а $p(x)$ и $q(x)$ — заданные непрерывные на $\mathbb{R}^{(1)}$ функции, причем такие, что $p(x)\ge p_0>0$ и $q(x)\ge q_0>0$. Ограничимся частным видом стабилизатора, когда $p(x)=a^2=const$ и $q(x)=1$, тогда, как известно,

$$grad\,\Omega(\zeta)=a^2\zeta(x)+D^*D\zeta(x), \qquad (3.9)$$

где $D^*=-D$ — оператор, “сопряженный с оператором дифференцирования D при

$\zeta(\pm\infty) = 0$.

Таким образом, условие (3.3) на основании полученных соотношений (3.7) — (3.9) можно переписать в виде

$$\alpha\left(a^2E + D^*D\right)\zeta(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)+\zeta(\xi)}{(\xi-x)^2 + \left[\zeta(x)+\zeta(\xi)\right]^2}\eta(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(x)}{(x-\xi)^2+\zeta^2(x)}u_\delta(\xi)\,d\xi - \zeta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+\left[\zeta(x)+\zeta(x)\right]^2}{(x-\xi)^2+\left[\zeta(x)+\zeta(\xi)\right]^2}\,d\xi.$$

Это уравнение и есть уравнение Эйлера для сглаживающего функционала $T^\alpha\left[\zeta, u, \delta\right]$. Положим $\eta(x) = \zeta_{n+1}(x) - \zeta_n(x)$ и экстремаль $\zeta(x)$ сглаживающего функционала будем искать в виде предела последовательности $\left\{\zeta_n^\alpha(x)\right\}$, которую получим при помощи итерационного процесса

$$\alpha\left(a^2E + D^*D\right)\zeta_{n+1}^\alpha(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(\xi)}{(\xi-x)^2+\left[\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(\xi)\right]^2}\zeta_{n+1}^\alpha(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n^\alpha(x)}{(x-\xi)^2+\left[\zeta_n^\alpha(x)\right]^2}u_\delta(\xi)\,d\xi - \zeta_n^\alpha(x) +$$

(3.10)

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(x-\xi)^2+\left[\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(x)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(\xi)\right]^2}\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(\xi)}{(\xi-x)^2+\left[\zeta_n^\alpha(x)+\zeta_n^\alpha(\xi)\right]^2}\zeta_n^\alpha(\xi)d\xi.$$

При этом мы ограничимся построением алгоритма решения уравнений (3.10) и вовсе не будем касаться не только вопросов разрешимости каждого из уравнений при фиксированных параметрах α и n, но и вопросов сходимости последовательности $\left\{\zeta_n^\alpha(x;\delta)\right\}$ к $\zeta(x)$.

3.2.2. Конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов. Рассмотрим конечномерную аппроксимацию уравнений (3.10). Напомним, что речь идет об использовании метода регуляризации А. Н. Тихонова при решении обратной задачи для контактной поверхности в условиях, когда поле $u_\delta(x)$ измерено на коротком профиле и мы лишены возможности свободно маневрировать при аппроксимации используемых операторов. Ситуация вынуждает ограничиться использованием конкретно заданных значений пределов интегрирования и побуждает к необходимости оценить величину погрешности, обусловленной заменой точного оператора его приближением. При аппроксимации будем пользоваться операторами проектирования (сужения) P_m, T_n' и T_n, каждый из которых ставит в соответствие (непрерывной) функции m (или n) – мерный столбец ее значений в заданной системе узлов. Используя оператор P_m, получим

$$\left[A_m'(\zeta)\right]u_\delta(x) \equiv p_m\left[A'(\zeta)\right]u_\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a_m+x}^{a_m+x}\frac{\zeta(x;m)}{\zeta^2(x;m)+(x-\xi)^2}u_\delta(\xi)d\xi, \qquad (3.11)$$

$$\left[A_m'(\zeta)\right]A(\zeta;x) \equiv P_m\left[A'(\zeta)\right]A(\zeta;x) =$$

$$= \zeta(x;m) - \frac{1}{2\pi}\int_{-a_m}^{a_m}\ln\frac{(x-\xi)^2+\left[\zeta(x;m)+\zeta(x;m)\right]^2}{(x-\xi)^2+\left[\zeta(x;m)+\zeta(\xi;m)\right]^2}d\xi,$$

(3.12)

$$[A'_m(\zeta)]^* A(\zeta)\eta(x) \equiv P_m [A'(\zeta)]^* A'(\zeta)\eta(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-a_m}^{a_m} \frac{\zeta(x;\, m)+\zeta(\xi;\, m)}{(\xi-x)^2+[\zeta(x;\, m)+\zeta(\xi;\, m)]^2}\,\eta(\xi;\, m)d\xi\,.$$

(3.13)

Погрешности $\sigma(x;\, m;\, A'^*)$, $\sigma(x;\, m;\, A'^* A)$ и $\sigma(x;\, m;\, A'^* A')$, обусловленные соответственно заменой операторов $[A'(\zeta)]^* u_\delta(x)$, $[A'(\zeta)]^* A'(\zeta;\, x)$, $[A'(\zeta)]^* A'(\zeta)\eta(x)$ их приближениями (3.11), (3.12) и (3.13), очевидно, определяются в виде

$$\sigma(x;\, m;\, A'^*) = \frac{1}{\pi}\int_{-a_m}^{\infty}\left\{\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(x-\xi)^2}u_\delta(\xi)+\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(x+\xi)^2}u_\delta(-\xi)\right\}d\xi\,,$$

$$\sigma(x;\, m;\, A'^* A) = \frac{1}{2\pi}\int_{a_m}^{\infty}\frac{(x-\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(\xi)]^2}{(x-\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(x)]^2}\,\frac{(x+\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(-\xi)]^2}{(x+\xi)^2+[\zeta(x)+\zeta(x)]^2}\,d\xi\,,$$

$$\sigma(x;\, m;\, A'^* A') = \frac{1}{\pi}\int_{-a_m}^{\infty}\left\{\frac{[\zeta(x)+\zeta(\xi)]\eta(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)+\zeta(\xi)]^2}+\frac{[\zeta(x)+\zeta(-\xi)]\eta(-\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta(x)+\zeta(-\xi)]^2}\right\}d\xi\,.$$

Нетрудно видеть, что оценки этих погрешностей на классе $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ принимают вид

$$\left\|\sigma(x;\, m;\, A'^*)\right\|_C = \frac{u_0 h^+}{h^-}\left(1-\frac{2}{\pi}arctg\,\frac{2a_m}{h^-}\right)$$

$$\left\|\sigma(x;\, m;\, A'^* A)\right\|_C = \frac{1}{\pi}\left\{2\pi(h^+-h^-)-a_m\ln\frac{a_m^2+(2h^+)^2}{a_m^2+(2h^-)^2}-\right.$$

$$\left.-4h^+\, arctg\,\frac{a_m}{2h^+}+4h^-\, arctg\,\frac{a_m}{2h^-}\right\},$$

(3.14)

$$\left\|\sigma(x;\, m;\, A'^* A)\right\|_C = \frac{\Delta h^+}{h^-}\left(1-\frac{2}{\pi}arctg\frac{a_m}{2h^-}\right),$$

где $u_0 = \max|u(x)|$, $\Delta = \max|\eta(x)|$, когда $x \in [-c, c]$.

Перейдем теперь к конечномерной аппроксимации операторов (3.11) — (3.13). Будем считать, что функция $u_\delta(x)$ задана на дискретном множестве точек x_k, расположенных равномерно на интервале $[-c, c]$ с шагом Δx, так что $x_k = x_1+(k-1)\Delta x$, $k = 1, 2, \cdots, h$. На этом множестве точек будем определять приближения $\zeta_p(x)$ контакта $\zeta(x)$. Поэтому примем, что нам задана последовательность $\{T_n\}$ операторов сужения T_n, приводящих в соответствие функции $u_\delta(x)$ и $\zeta(x)$ кортежам $u_\delta = (u_\delta(x_1), u_\delta(x_2), \cdots, u_\delta(x_n))$ и $\zeta = \; = (\zeta(x_1), \zeta(x_2), \cdots, \zeta(x_n))$. Кортежи можно рассматривать в качестве векторов n - мерного пространства $R^{(n)}$, снабженного «кубической» или «сферической» нормой.

Таким образом, при помощи операторов сужения T_n мы переходим от непрерывных объектов (3.11) — (3.13) функциональных пространств к конечномерным элементам n-мерных векторных пространств, которые соответственно принимают вид

$$[A'_m(\zeta)]^* T_m u_\delta(x) = \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\zeta(x_k;\, n;\, m;\, \delta)}{\zeta^2(x_k;\, n;\, m;\, \delta)+(x_k-\xi_i)^2}u_\delta(\zeta_i)\,,$$

$$[A'_m(\zeta)]^* A(T_m\zeta;\, x) = \zeta(x_k;\, n;\, m) -$$

$$-\frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{(x_k-\xi_i)^2+[\zeta(x_k;\, n;\, m)+\zeta(x_k;\, n;\, m)]^2}{(x_k-\xi_i)^2+[\zeta(x_k;\, n;\, m)+\zeta(\xi_i;\, n;\, m)]^2}$$

(3.15)

$$[A'_m(\zeta)]^* A'(\zeta)T_n\eta(x)=$$

$$=\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta(x_k;\, n;\, m)+\zeta(\xi_i;\, n;\, m)}{(\xi_i-x_k)^2+[\zeta(x_k;\, n;\, m)+\zeta(\xi_i;\, n;\, m)]^2}\eta(\xi_i;\, n;\, m),$$

$k=1,\, 2,\, \ldots,\, n;\quad n\le m.$

В результате неэквивалентной замены операторов (3.11) — (3.13) операторами (3.15) мы допускаем некоторые погрешности, которые оцениваются соответственно функциями

$$\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^*)=[A'_m(\zeta)]^* u_\delta(x)-[A'_m(\zeta)]^* T_m u_\delta(x),$$

$$\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^* A)=[A'_m(\zeta)]^* A(\zeta;\, x)-[A'_m(\zeta)]^* A(T_m\zeta;\, x)$$

(3.16)

$$\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^* A')=[A'_m(\zeta)]^* A'(\zeta)\eta(x)-[A'_m(\zeta)]^* A'(\zeta)T_n\eta(x),$$

практически нам неизвестными. Однако, в связи с тем, что данные функции играют роль дополнительного члена формулы прямоугольников при численном интегрировании, мы можем оценить их влияние на точность аппроксимации соответствующих операторов. В результате получим

$$\left\|\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^*)\right\|_C\le\frac{a_m^3 h^+}{6\pi m^2(h^-)^4}[u_0+3h^- u'_0+2(h^-)^2 u''_0],$$

$$\left\|\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^*,\, A)\right\|_C\le\frac{a_m^3(h^+)^2}{24\pi m^2(h^-)^4}\left[(3a+4bh^-)\frac{h^-}{h^+}+\frac{9+a^2}{4}\left(\frac{h^-}{h^+}\right)^2\right],$$

(3.17)

$$\left\|\sigma(x;\, n;\, m;\, A'^*,\, A')\right\|_C\le\frac{a_m^3 h^+}{48\pi n^2(h^-)^4}\left\{\left[1+4a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+6h^-\right)\frac{h^-}{h^+}\right]\eta_0+\right.$$

$$\left.+6\left(1-\frac{a}{6}\cdot\frac{h^-}{h^+}\right)h^-\eta_0{}'+8(h^-)^2\eta_0{}''\right\}$$

где $u_0=\max|u(x)|$, $u_0{}'=\max|u'(x)|$, $u_0{}''=\max|u''(x)|$, $\eta_0=\max|\eta(x)|$, $\eta_0{}'=\max|\eta'(x)|$, $\eta_0{}''=\max|\eta''(x)|$, $a=\max|\zeta''(x)|$, $b=\max|\zeta'''(x)|$, при $x\in[-c,c]$.

Мы видим, что погрешности $\sigma(x;n;A'^*)$, $\sigma(x;n;A'^*A)$ и $\sigma(x;n;A'^*A')$ с ростом числа узлов убывают как $0(n^{-2})$. Однако, этих сведений теперь недостаточно для характеристики качества аппроксимации операторов, поскольку с ростом числа n растет в общем случае и число уравнений, которыми аппроксимируется рассматриваемый оператор. А последнее обстоятельство может приводить к ухудшению качества аппроксимации. Немного погодя мы вернемся к этому вопросу.

Сейчас же, завершая конечномерную аппроксимацию уравнений (3.10), остановим наше внимание на построении аналога оператора (3.9). Для его построения, очевидно, нужно иметь некоторое приближенное аналитическое представление для контакта $\zeta(x)$. Это представление можно получить при помощи какого-нибудь из операторов продолжения S_k, ставящего в соответствие вектору $\zeta=\{\zeta(x_i)\}_{i=1}^{k}$ из $\Re^{(k)}$ функцию

$\zeta(x;k) = S_k \zeta$ из $St^{\,(1,\alpha)}\,(1,\Pi)$ и таким образом являющегося правым обратным оператором по отношению к введенному ранее оператору сужения T_k. Обычно правых обратных к оператору T_k бесконечное множество, ибо множество нулей оператора T_k состоит как правило, больше, чем из одного элемента, т. е. $N(T_k) \neq \{0\}$. Поэтому можно ставить вопрос о построении оптимального (в каком-то смысле) оператора продолжения. Мы делать этого не будем, а ограничимся рассмотрением в качестве оператора продолжения S_k интерполяционной формулы Лагранжа [105 — 107] для равноотстоящих узлов $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_k - x_{k-1} = \Delta x$, которая дает способ построения функции $\zeta(x_k)$, интерполирующей значения $\zeta(x_i)$, $x_i = x_1 + (i-1)\Delta x$, $i = 1, 2, \cdots, k$, в виде многочлена степени k

$$\zeta(x;k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{\zeta(x_i)}{(i-1)(k-i)} \cdot \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)}{t-i+1},$$

где $t = \dfrac{(x - x_1)}{\Delta x}$. Отсюда, поскольку $\dfrac{dx}{dt} = \Delta x$, получаем

$$\Delta x \frac{d\zeta(x;k)}{dx} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{\zeta(x_i)}{(i-1)(k-i)} \frac{d}{dt} \cdot \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)}{t-i+1}$$

и при $x = x_j$ будем иметь

$$\Delta x \frac{d\zeta(x;k)}{dx} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{\zeta(x_i)}{(i-1)(k-i)} \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{t(t-1)(t-2)\cdot \cdots \cdot(t-k+1)}{t-i+1} \right].$$

В частности, если производную вычислять по трем последовательным значениям функции $\zeta(x_1)$, $\zeta(x_2)$, $\zeta(x_3)$, то находим

$$\frac{d\zeta(x_1;3)}{dx} = \frac{1}{2\Delta x}\left[-3\zeta(x_1) + 4\zeta(x_2) - \zeta(x_3)\right],$$

$$\frac{d\zeta(x_2;3)}{dx} = \frac{1}{2\Delta x}\left[-\zeta(x_1) + \zeta(x_3)\right],$$

(3.18)

$$\frac{d\zeta(x_3;3)}{dx} = \frac{1}{2\Delta x}\left[\zeta(x_1) - 4\zeta(x_2) + 3\zeta(x_3)\right].$$

Если же производную вычислять по пяти последовательным значениям функции $\zeta(x_1), \zeta(x_2), \cdots, \zeta(x_5)$, то будем иметь

$$\frac{d\zeta(x_1;5)}{dx} = \frac{1}{12\Delta x}\left[-25\zeta(x_1) + 48\zeta(x_2) - 36\zeta(x_3) + 16\zeta(x_4) - 3\zeta(x_5)\right],$$

$$\frac{d\zeta(x_2;5)}{dx} = \frac{1}{12\Delta x}\left[-3\zeta(x_1) - 10\zeta(x_2) + 18\zeta(x_3) - 6\zeta(x_4) + \zeta(x_5)\right],$$

$$\frac{d\zeta(x_3;5)}{dx} = \frac{1}{12\Delta x}\left[\zeta(x_1) - 8\zeta(x_2) + 8\zeta(x_4) - \zeta(x_5)\right],$$

(3.19)

$$\frac{d\zeta(x_4;5)}{dx} = \frac{1}{12\Delta x}\left[-\zeta(x_1) + 6\zeta(x_2) - 18\zeta(x_3) + 10\zeta(x_4) + 3\zeta(x_5)\right],$$

$$\frac{d\zeta(x_5;5)}{dx} = \frac{1}{12\Delta x}\left[\zeta(x_1) - 16\zeta(x_2) + 36\zeta(x_3) - 48\zeta(x_4) + 25\zeta(x_5)\right].$$

Для элементов n-мерного пространства $\Re^{(n)}$ формулы (3.18) и (3.19) можно переписать в матричном виде

$$\overline{\zeta^{(1)}(x;k)} = D_{(n;k)}\overline{\zeta(x)},$$
(3.20)

где векторы $\overline{\zeta^{(1)}(x;k)}$ и $\overline{\zeta(x)}$ суть

$$\overline{\zeta^{(1)}(x;k)} = \left\{\frac{d\zeta(x_1;k)}{dx}, \cdots, \frac{d\zeta(x_n;k)}{dx}\right\}^*,$$

$$\overline{\zeta(x)} = \{\zeta(x_1), \zeta(x_2), \cdots, \zeta(x_n)\}^*,$$

а матрица $D_{(n;k)}$ n-го порядка при вычислении первых производных, например, по значениям функции в трех следующих друг за другом точках x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, $j = 2, 3, \cdots, n-1$ имеет вид

$$D_{(n;3)} = \frac{1}{\Delta x}\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

Матрица $D_{(n;5)}$ имеет аналогичное строение.

Сделаем по поводу этих матриц важное замечание. В связи с тем, что каждая из формул (3.18) и (3.19) при $\overline{\zeta(x)} = const$ дает значение производной этой функции, равное нулю, то столбцы матриц $D_{(n;k)}$, $k = 3, 5$, линейно зависимы. В этом можно убедиться непосредственно, если к какому-либо столбцу матрицы $D_{(n;k)}$ прибавить остальные ее столбцы. В результате такого сложения получим нулевой столбец, что и будет означать линейную зависимость векторов-столбцов матрицы $D_{(n;k)}$.

Ясно, что и столбцы матриц $D^m_{(n;k)}$, $m \geq 2$, аппроксимирующих дифференциальные операторы $D^m = \dfrac{d^m}{dx^m}$ m-го порядка, также будут линейно зависимы. Причем, поскольку каждая из матриц $D^m_{(n;k)}$, $m \geq 1$, при умножении на вектор $\overline{\zeta(x)} = const$ должна непременно давать нулевой вектор, то свойство линейной зависимости векторов-столбцов этих матриц не будет зависеть от выбора того или иного базиса, в котором определяются конечномерные проекции соответствующих дифференциальных операторов D^m. Другими словами, если вместо интерполяционного многочлена Лагранжа мы изберем какой-либо другой интерполяционный многочлен в качестве оператора продолжения, то и в этом другом (не лагранжевом) базисе матрицы $D^m_{(n;k)}$, $m \geq 1$, операторов D^m окажутся вырожденными (с определителями, равными нулю). Вырожденными будут и матрицы $\left(D^m_{(n;k)}\right)^* D^m_{(n;k)}$, где матрица $\left(D^m_{(n;k)}\right)^*$ по отношению к исходной матрице $D^m_{(n;k)}$ является

транспонированной.

Отсюда заключаем, что если по содержанию некорректно поставленной задачи ее решение необходимо должно обладать гладкостью n-го порядка, то, выбирая стабилизатор в виде

$$\Omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} p_k(x) \left[D^k \zeta(x)\right]^2 dx \tag{3.21}$$

мы должны прежде всего позаботиться, чтобы среди заданных весовых функций $p_k(x)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, по меньшей мере, две из них, а, именно, непрерывные на $\mathbb{R}^{(1)}$ функции $p_0(x)$ и $p_n(x)$, удовлетворяли неравенствам

$$0 < p_0 \le p_0(x),$$

$$0 < p_n \le p_n(x),$$

в то время как остальные могут быть равными нулю, т.е. $p_k(x) \ge 0$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Однако эти условия сами по себе не являются достаточными для того, чтобы функционал (3.21) играл роль стабилизатора рассматриваемой задачи. Необходимым и достаточным условием этого будет такой выбор параметра p_0, чтобы каждая (при фиксированном $n > k$) конечномерная аппроксимация

$$B(i; k; m; n) = p_0(x_i) E_n + \sum_{m=1}^{n} p_m(x_i) \left(D^m_{(n;k)}\right)^* D^m_{(n;k)}$$

оператора

$$B = p_0(x) E + \sum_{m=1}^{n} p_m(x) \left(D^m\right)^* D^m$$

в выражении градиента $grad\, \Omega(\zeta) = B\zeta(x)$ функционала (3.21) была положительно определенной. Здесь, как и раньше, символами E_n и E обозначены тождественные операторы в соответствующих пространствах. Вернемся после этого замечания к конечномерной аппроксимации выражения (3.9) и параметр a^2 выберем таким образом, чтобы оператор

$$B(k; 1; n) = a^2 E_n + D^*_{(n;k)} D_{(n;k)}$$

был положительно определенным (например, удовлетворял условию Адамара

$$\left| a^2 + d_{i\,i} \right| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| d_{i\,j} \right| > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

где $d_{i\,j}$ — элементы матрицы $D^*_{(n;k)} D_{(n;k)}$).

Приближением градиента функционала $\Omega(\zeta)$ мы завершаем аппроксимацию уравнения (3.10). Теперь на основании соотношений (3.15) и (3.20) это уравнение можно переписать в следующем виде

$$\left\{\left[A'_m(\zeta)\right]^* A'(\zeta) T_n + \alpha \left(a^2 E_n + D^*_{(n;k)} D_{(n;k)}\right)\right\} \overline{\zeta^{\alpha}_{p+1}(x; n; m; \delta)} = \overline{b(x; \zeta; p; \alpha; n; m; \delta)} + \sigma_p(x; n; m), \tag{3.22}$$

где

$$\left[A'_m(\zeta)\right]^* A'(\zeta) T_n \zeta^{\alpha}_{p+1}(x; n; m; \delta) =$$

$$= \left\{ \frac{\Delta x}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\zeta^{\alpha}_{p}(x_j; n; m; \delta) + \zeta^{\alpha}_{p}(\xi_i; n; m; \delta)}{(\xi_i - x_j)^2 + \left[\zeta^{\alpha}_{p}(x_j; n; m; \delta) + \zeta^{\alpha}_{p}(\xi_i; n; m; \delta)\right]^2} \zeta^{\alpha}_{p+1}(\xi_i; n; m; \delta) \right\}_{j=1}^{n}$$

$$\overline{b(x;\zeta;\,p;\alpha;n;m;\delta)} =$$

$$= \left\{ \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)}{(x_j-\xi_i)^2+\left[\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)\right]^2}\left[u_\delta(\xi_i)-\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)\right]+\right.$$

$$+\frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{(\xi_i-x_j)^2+\left[\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)+\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)\right]^2}{(\xi_i-x_j)^2+\left[\zeta_p^{\alpha}(x_j;n;m;\delta)+\zeta_p^{\alpha}(\xi_i;n;m;\delta)\right]^2}+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\frac{\zeta_p^{\alpha}(x_i;n;m;\delta)+\zeta_p^{\alpha}(\xi_i;n;m;\delta)}{(x_i-\xi_j)^2+\left[\zeta_p^{\alpha}(x_i;n;m;\delta)+\zeta_p^{\alpha}(\xi_j;n;m;\delta)\right]^2}\zeta_p^{\alpha}(\xi_j;n;m;\delta)\right\}_{i=1}^{n},$$

$\sigma_p(x;n;m)$ — некоторая вектор-функция векторного аргумента $\sigma_0(x;n;m)$, а вектор-функция $\sigma_0(x;n;m)$ в свою очередь по определению (3.16) равна

$$\sigma_0(x_i;n;m) = \sigma(x_i;n;m;A'^*)+\sigma(x_i;m;A'^*)+$$
$$+\sigma(x_i;n;m;A'^*A)+\sigma(x_i;m;A'^*A)+$$
$$+\sigma(x_i;n;m;A'^*A')+\sigma(x_i;m;A'^*A').$$

Из общей теории некорректных задач следует, что системы линейных уравнений, аналогичные системам (3.22) при каждом фиксированном значении параметров n, m, δ и $\alpha>0$, разрешимы однозначно при любой правой части. В то же время системы (3.22) решить невозможно из-за наличия в правых частях неизвестных слагаемых $\sigma_p(x_i;n;m)$. Для получения приемлемых приближений контакта приходится ограничиваться решением систем, близких к системам (3.22) и отличающихся от последних отсутствием неизвестных слагаемых $\sigma_p(x_i;n;m)$. Что же касается вопросов сходимости получаемых таким образом приближений, то они должны быть изучены дополнительно с учетом оценок (3.14) и (3.17). Освещение этого круга вопросов выходит за рамки данного исследования, и мы не будем ими заниматься. Впрочем один аспект данной проблемы мы все-таки попытаемся раскрыть. Он касается характеристики качества конечномерной аппроксимации операторов уравнения (3.10). В этой связи отметим прежде всего следующее. При конечномерном проектировании выражений (3.11) — (3.13), результатом которого являются соотношения (3.15), мы исходили из того, что фрагмент контактной поверхности $\zeta(x)$ требуется определить на интервале $[-a,a]$ меньшем интервала $[-c,c]$, где задана функция $u_\delta(x)$. Поэтому при вычислении вектор-функции $b(x;\zeta;\,p;\alpha_q;n;m;\delta)$, $x\in[-a,a]$, мы должны продолжить значения функции $\zeta_p^{\alpha_q}(x;n;m;\delta)$ вне ее носителя $[-a,a]$. Это продолжение (экстраполяцию) выполним по правилу: в точках ξ_j, расположенных слева носителя, значения контакта положим равными значению приближению контакта в крайней левой точке носителя, т.е. $\zeta_p^{\alpha_q}(\xi_j;n;m;\delta)\equiv\zeta_p^{\alpha_q}(-a;n;m;\delta)$, $\xi_j\in[-a,a]$, а в точках ξ_j, расположенных справа носителя — значению приближения контакта в правой крайней точке носителя, т.е. $\zeta_p^{\alpha_q}(\xi_j;n;m;\delta)\equiv\zeta_p^{\alpha_q}(a;n;m;\delta)$, $\xi_j\in[a,c]$.

Для того же чтобы убедиться в том, что при $\alpha_q\to 0$ приближения $\zeta_p{}^0(x;n;m;\delta)\equiv\zeta_p(x;n;m;\delta)$ сходится при $n\to\infty$ и тем самым определяют приближения $\zeta_p(x;m;\delta)$, нам нужно показать, что операторы $\left[A'_m(\zeta)\right]^*A'(\zeta)T_n$, представляемые матрицами n-го порядка, обратимы при любом значении n (или невырождены). Если мы сумеем в этом убедиться, то тем самым получим ответ на волнующий нас вопрос о качестве аппроксимации операторов уравнения (3.10),

проливающий свет на проблемы сходимости конечномерных аппроксимаций.

Вспомним в этой связи представление (3.2) нелинейного оператора $A(\zeta\,;x)$ прямой задачи для контактной поверхности в уравнении $A(\zeta\,;x)=u(x)$. Имеет место

Теорема 3.1. *Оператор $A(\zeta;x)=\zeta(x)-B(\zeta;x)$ прямой задачи для контактной поверхности $\zeta(x)$, $x\in$ ☼$^{(1)}$ имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}(u;x)=\zeta(x)$ тогда и только тогда, когда $\zeta(x)\in St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.*

Доказательство. Поскольку на множестве $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ норма оператора $B(\zeta;x)$ определяется выражением $\|B(\zeta;x)\|_C=\max\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi\right|=q\|\zeta\|_C$, где

$$0<q=1-\frac{h^-}{h^+}<1, \qquad (3.23)$$

то, очевидно, справедливы неравенства

$$(1-q)\|\zeta\|_C\le\|A(\zeta\,;x)\|_C\le(1+q)\|\zeta\|_C. \qquad (3.24)$$

Отсюда в силу предыдущего неравенства (3.23), заключаем, что $A(\zeta;x)=0$ только для $\zeta(x)=const=0$. Следовательно, ядро оператора $A(\zeta;x)$ на множестве $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ состоит только из одного элемента, т. е. $N(A)=\{0\}$. А это означает, что оператор прямой задачи однозначно обратим на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Пусть $A^{-1}(u;x)$ — обратный оператор. Тогда, подставляя $\zeta(x)=A^{-1}(u;x)$ в неравенство (3.24) и учитывая, что $A(\zeta;x)=u(x)$, получим $\left\|A^{-1}(u;x)\right\|_C\le(1-q)^{-1}\|u(x)\|_C$. Следовательно, $A^{-1}(u;x)$ на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ ограничен.

С другой стороны, если $A^{-1}(u;x)$ существует и ограничен на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, то это означает, что найдется некоторая постоянная $c>0$ такая, что для любого элемента $u(x)$ из образа множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ будет справедливо неравенство

$$\left\|A^{-1}(u;x)\right\|_C\le c\|u(x)\|.$$

А так как в свою очередь $A^{-1}(u;x)=\zeta(x)$ и $u(x)=A(\zeta;x)$, то из полученного только что неравенства следует

$$c^{-1}\|\zeta(x)\|_C\le\|A(\zeta\,;x)\|_C,$$

т.е. выполняется левое из неравенств (3.24). Теорема полностью доказана.

Это утверждение является теоремой существования решения уравнения (3.1) для контактной поверхности. Однако, оно не дает конкретного способа построения нелинейного обратного оператора $A^{-1}(u;x)$ и, следовательно, является неконструктивным. Тем не менее его можно использовать при исследовании качества конечномерной аппроксимации уравнения Эйлера для сглаживающего функционала Тихонова. Ведь из утверждения, что на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ оператор $A(\zeta;x)$ однозначно обратим, по существу уже следует, что операторы $[A'_m(\zeta)]^*A'(\zeta)T_n$ невырождены и поэтому обратимы для любого значения параметра n. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно.

***Теорема 3.2**. Если константы h^- и h^+, определяющие полосу Π, удовлетворяют неравенству $h^-\ne(\sqrt{3}-1)h^+$, то линейный (по отношению к функции $\zeta_{n+1}(x)$) оператор*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)]^2}\zeta_{n+1}(\xi)d\xi=\left[A'(\zeta_n)\right]^* A'(\zeta_n)\zeta_{n+1}(x)$$

однозначно обратим на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Доказательство. По определению мы имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)]^2}\zeta_{n+1}(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)}{\zeta_n^2(x)+(x-\xi)^2}\left\{u(\xi)-\zeta_n(\xi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(t-\xi)^2+\zeta^2(\xi)}{(t-\xi)^2+\zeta^2(t)}dt\right\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)]^2}\zeta_n(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)}{\zeta_n^2(x)+(x-\xi)^2}\left\{A(\zeta,\xi)-A(\zeta_n,\xi)\right\}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)]^2}\zeta_n(\xi)d\xi.$$

Отсюда с учетом неравенств (3.24) и принадлежности $\zeta_n(x)$ множеству $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, получаем $\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)}{(\xi-x)^2+[\zeta_n(x)+\zeta_n(\xi)]^2}\zeta_{n+1}(\xi)d\xi\right|\le$

$$\le\left|(1-q)h^+-(1+q)h^++\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2h^-}{(2h^+)^2+(\xi-x)^2}h^-d\xi\right|=\left|1-4q-q^2\right|\cdot\|\zeta(x)\|_C.$$

Поскольку возможные значения константы q находятся на отрезке $(0,1)$, то положительная функция $c(q)=\left|1-4q+q^2\right|$ может обратиться в нуль только в точке $q_0=2-\sqrt{3}$, т.е., когда выполняется условие $h^-=(\sqrt{3}-1)h^+$.

Следовательно, в условиях теоремы линейный оператор $\left[A'_m(\zeta_n)\right]^* A'(\zeta_n)\zeta_{n+1}(x)$ ограничен снизу. Поэтому он невырожден и однозначно обратим, что и требовалось доказать.

Возвращаясь к выражениям (3.15) операторов $\left[A'_m(\zeta)\right]^* A'(\zeta)T_n\eta(x)$ при $\eta(x)=\zeta_{p+1}(x)-\zeta_n(x)$ и оценкам (3.17) погрешностей аппроксимации видим, что при $n\to\infty$ и каждом фиксированном значении m конечномерные операторы как интегральные суммы стремятся к выражениям (3.13), которые в свою очередь при $m\to\infty$ приближаются к операторам $\left[A'(\zeta_p)\right]^* A'(\zeta_p)\zeta_{p+1}(x)$. А последние, как только что показано, невырождены и обратимы однозначно на образе множества $St^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Таким образом, и каждый из операторов $\left[A'(\zeta_p)\right]^* A'(\zeta_p)\mathrm{T}_n\zeta_{p+1}(x)$ при фиксированных m и n также невырождены и обратимы в ☼$^{(n)}$.

Данные рассуждения, хотя и не являются строгими, но все же дают представление о качестве аппроксимации операторов уравнения (3.10).

В заключение опишем модель алгоритма поиска регуляризованного решения $\zeta_{p_0}^{\alpha(\delta)}(x_k;n;m;\delta)$, $k=1,2,\dots,N$, нелинейного интегрального уравнения для контактной поверхности, в качестве которого выбирается та экстремаль сглаживающего функционала А. Н. Тихонова $\mathrm{T}^{\alpha}(\zeta;u;\delta)$, которая определяется на основании принципа невязки из последовательности $\zeta_p^{\alpha}(x_k;n;m;\delta)$ генерируемой процессом (3.22) на монотонно убывающей последовательности $\{\alpha_k\}$ значений параметра регуляризации $(\alpha_k=\mu\alpha_{k+1},\ \mu<1)$.

3.2.3. Модель алгоритма определения контакта на коротком профиле. Пусть

заданы f — гравитационная постоянная, σ — скачок плотности на контакте, $g_\delta(\xi_k)$ — поле контакта в дискретных точках ξ_k отрезка $[-b, b]$, дискретная сеть точек $\xi_k = \xi_0 + (k-1)\Delta\xi$, $k = 1, 2, \ldots, m$, с шагом $\Delta\xi$ и δ — мера погрешности поля. Требуется определить значения контакта $\zeta(x_k)$ на отрезке $[-a, a] \subset [-b, b]$ в точках $x_k = x_0 + (k-1)\Delta x, \ k = 1, 2, \ldots, n.$

Шаг 1. Вычислить матрицу $B(q;1;n)$ регуляризации первого порядка. Если $n \le 7$, то определяется матрица $D_{(n;q)}$, $q = 3$, если же $n > 7$, то — матрица $D_{(n;q)}$, $q = 5$. Затем вычисляется положительно определенная матрица $B(q;1;n) = a^2 E_n + D^*_{(n;q)} D_{(n;q)}$, ($q = 3$ или $q = 5$).

Шаг 2. Вычисляется «нормированное» значение поля $u_\delta(\xi_k) = q_\delta(\xi_k)/2\pi f\sigma$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и функция $\zeta^{\alpha_0}(x_k) = u_\delta(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В качестве нулевого приближения контакта полагается $\zeta_0(x_k) = \zeta^{\alpha_0}(x_k)$.

Шаг 3. Для пары $(\alpha_k; p)$ вычисляется вектор невязки

$$\Delta u(x_i;\alpha_k;p;n;m;\delta) = u_\delta(x_i) - \zeta_p^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta) +$$

$$+\frac{\Delta\xi}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{(\xi_j - x_i)^2 + \left[\zeta_p^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta) + \zeta_p^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta)\right]^2}{(\xi_j - x_i)^2 + \left[\zeta_p^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta) + \zeta_p^{\alpha_k}(\xi_j;n;m;\delta)\right]^2}$$

и значения функционалов $\|\Delta u(\alpha_k;p;)\| = \|\Delta u(x_i;\alpha_k;p;n;m;\delta)\|$,

$$\varphi(\zeta_з^{\alpha_k}) = \|\Delta u(x_i;\alpha_k;p;n;m;\delta) - \delta\|.$$

Шаг 4. Вычисляется матрица $\left[A'_m(\zeta_p)\right]^* A'(\zeta_p)\mathrm{T}_n + \alpha_k B(q;1;n)$ и правая часть $\overline{b(x;\zeta;p;\alpha;n;m;\delta)}$ системы уравнений

$$\left\{\left[A'_m(\zeta_p)\right]^* A'(\zeta_p)\mathrm{T}_n + \alpha_k B(q;1;n)\right\}\overline{\zeta_{p+1}^{\alpha_k}(x;n;m;\delta)} = \overline{b(x;\zeta;p;\alpha;n;m;\delta)},$$

где $\left[A'_m(\zeta_p)\right]^* A'(\zeta_p)\mathrm{T}_n \zeta_{p+1}^{\alpha_k}(x;n;m;\delta) =$

$$\left\{\frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(\xi_i;n;m;\delta)}{(\xi_i - x_j)^2 + [\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(\xi_j;n;m;\delta)]^2}\zeta_{p+1}^{\alpha_k}(\xi_i;n;m;\delta)\right\}_{j=1}^{n},$$

$$\overline{b(x;\zeta;p;\alpha;n;m;\delta)} =$$

$$=\left\{\frac{\Delta\xi}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_p(x_j;n;m;\delta)}{(x_j - \xi_i)^2 + \zeta_p^2(x_j;n;m;\delta)}[u_\delta(\xi_i) - \zeta_p(x_j;n;m;\delta)] + \right.$$

$$+\frac{\Delta\xi}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{(\xi_i - x_j)^2 + [\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(x_i;n;m;\delta)]^2}{(\xi_i - x_j)^2 + [\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(\xi_i;n;m;\delta)]^2} +$$

$$\left. + \frac{\Delta x}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(\xi_i;n;m;\delta)}{(\xi_i - x_j)^2 + [\zeta_p(x_j;n;m;\delta) + \zeta_p(\xi_j;n;m;\delta)]^2}\zeta_p^{\alpha_k}(\xi_i;n;m;\delta)\right\}_{j=1}^{n},$$

$$\zeta_p(x_j;n;m;\delta) \equiv \zeta_p^{\alpha_k}(x_j;n;m;\delta).$$

Шаг 5. Определяется вектор $\overline{\zeta_{p+1}^{\alpha_k}(x;n;m;\delta)}$ при помощи решения системы уравнений, полученной на предыдущем шаге методом жордановых исключений (105 — 107). Находится величина $\zeta_{\max}^{\alpha_k} = \left\|\zeta_{p+1}^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta) - \zeta_p^{\alpha_k}(x_i;n;m;\delta)\right\|$. Если $\zeta_{\max}^{\alpha_k} \ge \|\Delta u(\alpha_k;p)\|$, то полагается $p = p+1$ и осуществляется переход к шагу 4; иначе — к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляются функционалы $\|\Delta u(\alpha_k; p+1)\|$ и $\varphi(\zeta_{p+1}^{\alpha_k})$. Если $\varphi(\zeta_{p+1}^{\alpha_k}) \geq \varphi(\zeta_p^{\alpha_k})$, то вычисления прекращаются; иначе определяется значение $\alpha_{k+1} = \mu\alpha_k$, полагаются $k = k+1$, $p = p+1$ и осуществляется переход к шагу 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований разработан метод решения нелинейной граничной задачи восстановления потенциала по модулю его градиента и созданы теория и методы решения обратной задачи логарифмического потенциала звездных ограниченных или неограниченных с известной постоянной плотностью (или намагниченностью) областей, близких к кругу или к слою постоянной толщины. Ключевые положения теории и методов сводятся в основном к следующему.

1^0. Сформулирована новая нелинейная граничная задача восстановления потенциала притяжения в неограниченной замкнутой области по значениям модуля его градиента на границе области при условии близости потенциала к заданному. Предложен и логически обоснован способ решения задачи в виде последовательности решений граничных задач Неймана для уравнения Лапласа, определяющих возмущающий потенциал. Установлена корректная разрешимость каждого из линейных интегральных уравнений последовательности с компактными операторами, обладающими большими ядрами. Доказана сходимость последовательности решений задач Неймана к функции, однозначно репрезентующей искомый потенциал.

2^0.Описаны математические модели обратной задачи в виде нелинейных интегральных уравнений с вполне непрерывными операторами, которые определяют отклонения контуров возмущающих тел от заданных. В предположении, что отклонения невелики для поиска решений нелинейных уравнений предложены итерационные процедуры, на каждом шаге которых приближения отклонений вычисляются в виде решений линейных интегральных уравнений с симметричными, неотрицательными и компактными операторами.

3^0. Изучены спектральные характеристики интегральных операторов в гильбертовом пространстве. Выяснена структура множества нормальных решений и множества соответствующих им значений данных. Установлено, что нуль-многообразия операторов являются множествами второй категории по отношению к множествам нормальных решений. Приведены примеры сильной неустойчивости операторов. Найдены эффективные критерии принадлежности входных данных и решений соответствующим областям значений операторов и областям определения нормальных решений, которые учитываются при конструировании адаптивных процедур сглаживания данных и в регуляризующих алгоритмах поиска оптимальных решений.

4^0. Доказаны теоремы существования и устойчивости локальных решений обратной задачи для заданного класса тел на компактных подмножествах множества единственности.

5^0. Рассмотрен общий метод поиска оптимального решения линейного интегрального уравнения первого рода с неотрицательным симметричным компактным оператором, которое используется в качестве одного из приближений отклонения контура от заданного в глобальном итерационном процессе. Он состоит в построении локального регуляризующего оператора для данного уравнения в виде минимизирующей последовательности сглаживающего функционала, представляющего собой взвешенную сумму функционала типа невязки со специальным стабилизатором, определенным на множестве единственности. Построены два типа стабилизаторов (слабый и сильный). Они конструируются при помощи таких дифференциальных операторов, собственные функции которых совпадают с собственными функциями операторов прямого соответствия, что предопределяет успешное их применение при поиске оптимального решения. Для этих стабилизаторов доказана теорема существования локальных регуляризующих операторов.

Они среди известных своих модификаций обладают наилучшей обусловленностью и обеспечивают самую высокую точность вычислений. Регуляризующие операторы каждой функции из гильбертова пространства данных $L^{(2)}(G)$ ставят в соответствие функции гильбертова пространства решений $W_2^{(1)}(G)$, имеющих обобщенную производную в случае слабого и интегрируемую в квадрате в случае сильного стабилизаторов.

6^0. Разработан эффективный способ решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих отклонения контуров возмущающих звездных областей от заданных. Глобальный регуляризующий оператор для нелинейного уравнения отыскивается в виде последовательности локальных регуляризующих операторов для соответствующих линейных интегральных уравнений с компактными операторами. Для определения правой части этих уравнений разработаны специальные адаптивные процедуры сглаживания входных данных.

7^0. Предложен регуляризующий алгоритм построения контактной границы заданной гладкости по значениям поля, заданного на существенно коротком интервале. Впервые отмечено, что стабилизирующие функционалы в регулярных алгоритмах должны определяться такими дифференциальными операторами, которые состоят из суммы операторов собственно дифференцирования и из «диагонального» (тождественного) отличного от нуля оператора. Разработан способ вычисления прямых операторов в уравнениях Эйлера с высокой точностью, не достигаемой в традиционных способах их характеризации.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Черный А. В., Черная Н. Н. и др. Исследования по аналитическому продолжению модуля градиента потенциала силы тяжести (окончательный отчет за 1971 – 1975 г.г.) — Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. Б 531 948, № гос. рег. 76 077 388; фонды ИГ НАН Украины, Р 679, 1976 г. – 417 с.
2. Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С. Исследования по аналитическому продолжению модуля градиента потенциала силы тяжести (окончательный отчет за 1976 – 1980 г.г.) — Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. Б 955 198, № гос. рег. 79 015 294; фонды ИГ НАН Украины, Р 827, 1980 г. – 310 с.
3. Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С. Теория решения линейных и нелинейных задач интерпретации данных гравиметрии и магнитометрии (окончательный отчет за 1981 – 1985 г.г.) — Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. 02. 86. 006 6095, № гос. рег. 81 057 377; фонды ИГ НАН Украины, Р 997, 1985 г. – 428 с.
4. Черный А. В., Черная Н. Н., Гольцев В. С. Граничные задачи теории интерпретации данных гравиметрии (окончательный отчет за 1986 – 1990 г.г.) — Фонды ВИНИТИ, Москва, инв. 029. 10 037 026, № гос. рег. 01. 86 О 083 184; фонды ИГ НАН Украины, 835, 1990 г. – 356 с.
5. Черный А. В., Черная Н. Н., Кислинская О. А. Некоторые обратные задачи потенциалов, удовлетворяющих самосопряженным эллиптическим уравнениям, и их приложения в геофизике (окончательный отчет за 1991 – 1995 г.г.) — Фонды УИНТиЭИ, Киев, инв. О 296 U 000 115, № гос. рег. UA 01 001 290 Р; фонды ИГ НАН Украины, 882, 1995 г. –84 с.
6. Черный А. В., Якимчик А. И. Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. 1 // Геофиз. журн., 1999, 21, №3, - с. 55-72; 2000, 22, №6, - с.
7. Черный А. В., Якимчик А. И. О восстановлении потенциала по значениям модуля его градиента. // Докл. НАН Украины — 1999. - №10. - с. 121-125
8. Старостенко В. И., Черная О. А., Черный А. В. Интегральные уравнения задачи определения контуров звездных тел, близких к заданным // Докл. НАН Украины — 1998. - №7. - с. 129-131
9. Козленко Ю. В., Корчагин И. Н., Черный А. В., Якимчук Н. А. Проблемно-ориентированный комплекс оперативного истолкования аномалий геоида,

определяемых по данным спутниковой альтиметрии // Докл. НАН Украины — 1997. - №12. - с. 118-122
10. Козленко Ю. В., Корчагін І. М., Михайлюк С. Ф., Соловйов В. Д., Чорний А. В., Якимчук М. А. Програмний комплекс обробки та інтерпретації гравіметричних і магнітометричних даних і аномалій геоїду // Бюл. Україн. антарк. центру. Вип 1 – Київ. 1997. - с. 245 – 250
11. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Об интегральных уравнениях обратной задачи логарифмического потенциала определения контура звездного тела, близкого к заданному // Геофиз. журн., - 1997. – 19, №6. – с. 3 – 10
12. Греку Р. Х., Козленко Ю. В., Корчагин И. Н., Соловьев В. Д., Черный А. В., Якимчук Н. А. Сопоставление гравиметрических и альтиметрических данных вдоль спутниковых траекторий (по материалам 60-го антарктического рейса НИСП «Эрнст Кренкель»). Ин-т геофизики НАН Украины. – Киев, 1997. – 49 с. Ил., библиогр.: 25 назв. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины. 27.10.97, №533 – Ук 97.
13. Корчагин И. Н., Козленко Ю. В., Соловьев В. Д., Черный А. В., Якимчук Н. А. Гравиметрические и магнитометрические исследования в 60-ом антарктическом рейсе НИСП «Эрнст Кренкель»: Результаты геофизических исследований и программно-алгоритмические разработки. НАН Украины. Украинский антарктический центр. Ин-т геофизики. – Киев, 1997. – 258 с. Ил., библиогр.: 117 назв. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины. 8.12.97, №592 – Ук 97.
14. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. О постановке обратных задач логарифмического потенциала определения формы некоторых тел, близких к заданным // Геофиз. журн. 1998. – 20, №1, - с. 15-25.
15. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. О фундаментальных свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журн. 1998. – 20, №3, - с. 3-23.
16. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. Проблемы существования, единственности и устойчивости решений задач определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журн. 1999. – 21, №1, - с. 3-19.
17. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. Последовательности линейных интегральных уравнений для восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. – №2, - с. 135-139.
18. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. О характеристических свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. – №5, - с. 146-149.
19. Старостенко В. И., Черная О. А., Черная Н. Н., Черный А. В. Об условиях разрешимости задач определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. – №6, - с. 135-138.
20. Черная О. А. Об устойчивых способах решений задач определения звездных областей, близких к заданным. Ч. 1, 2 // Геофиз журн. – 1999. – 21, №3. - с. 100-118; №6. – с. 51-71.
21. Черная О. Н. Функционалы в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2000, №1. – с. 124-127.
22. Черная О. Н. Вариационный принцип отбора допустимых решений задач восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. – 2000, №2. – с. 128-131.
23. Yakymchuk M., Yakymchuk Y., Cherny A., Korchagin I., Kozlenko Y. The interpretation of geoid anomalies by an automated fitting method // Annals Geophysical. Part 1. Society Symposia, Solid Earth. Geophysics&Geodesy. Supplement 1 to Volume 16, p. 200. 1998.
24. Starostenko V. I., Chernaya O. A. and Chernyi A. V. Integral equations in the inverse problem of the logarithmic potential for calculating the contour of a star-shaped body similar to a required body // Geophys. I., 1998. Vol. 17, p.p. 799-812.

25. Starostenko V. I., Chernaya O. A., Chernaya N. N. and Chernyi A. V. Formulating inverse problems of the logarithmic potential for establishing the shape of some bodies approaching the bodies defined // Geophys. I., 1998. Vol. 18, p.p. 19-36.
26. Starostenko V. I., Chernaya O. A., Chernaya N. N. and Chernyi A. V. On fundamental properties of direct correspondence operators in defining star-shaped domains, similar to required domains // Geophys. I., 1998. Vol. 18, p.p. 443-473.
27. Starostenko V. I., Chernaya O. A., Chernaya N. N. and Chernyi A. V. Existence, uniqueness and stability of solutions of identifying star-shaped domains approaching those specified // Geophys. I., 1999. Vol. 19, p.p. 1-28.
28. Cherny A. V., Yakimchik A. I. Reconstructing the potential from the modulus of its gradient.1 // Geophys. I., 2000. Vol. 19, p.p. 543-580.
29. Chernaya O. A. On stable methods of identifying star-shaped domains similar to a specified domain // Geophys. I., 2000. Vol. 19, p.p. 629-676.
30. Бровар В. В., Магницкий В.А., Шимбирев Б.П. Теория фигуры Земли. - М.: Геодезиздат, 1961. - 256 с.
31. Идельсон Н. И. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. - М. -Л.: ОНТИ, 1936. - 424 с.
32. Стокс Дж. О силе тяжести на земной поверхности // Статьи о силе тяжести и фигуре Земли. - М.: Геодезиздат, 1961. - с.11-44.
33. Пуанкаре А. Измерение силы тяжести и геодезия // Статьи о силе тяжести и фигуре Земли. - М.: Геодезиздат, 1961. - с.103-135.
34. Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. - М.: Геодезиздат, 1945. - Вып. 42. -с.10-61.
35. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигура Земли // Тр. ЦНИИГАиК. - М.: Геодезиздат, 1960. - Вып. 131. - 290 с.
36. Юнг К. Гравиметрические методы прикладной геофизики // Прикладная геофизика. - М. - Л.: ОНТИ, 1936. - Вып. 1. - с.53-204.
37. Нумеров Б. В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР 1930, № 21. - с.569-574.
38. Новиков П. С. О единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938, 18, № 3. - с.165-168.
39. Сретенский Л. Н. Об одной обратной задаче теории потенциала // Изв. АН СССР Сер. матем. 1938, № 5-6. - с.551-570.
40. Заморев А. А. Об определении производных гравитационного потенциала и соотношений между моментами возмущающих масс по производной, заданной на плоскости // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1939, №3. - с.275-285.
41. Заморев А. А. Исследование двухмерной обратной задачи потенциала // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1941, №4-5. - с. 487-500.
42. Заморев А. А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1942, №1-2. - с.48-54.
43. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. 39, №5. - с.195-198.
44. Андреев Б. А., Клушин И. Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. - Л.: Недра. 1965. - 496 с.
45. Рапопорт И. М. Об одной задаче теории потенциала // Укр. матем. журню 1950. 2, №2. - с.38-55.
46. Справочник геофизика. Гравиразведка. - М.: Недра, 1981. - 400 с.
47. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. - Новосибирск: НГУ, 1966. - 560 с.
48. Сербуленко М. Г. Линейные методы разделения потенциальных полей // Приложение некоторых методов математики к интерпретации геофизических данных. -

Новосибирск: Наука, 1967. - с.5-75.
49. Страхов В. Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - М.: 1972 - 78 с.
50. Алексидзе М. А., Гелашвили М. С., Картвелишвили К. М. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. - Тбилиси: изд. Мецниереба, 1972. - 284 с.
51. Соколовский К. И. Экстремальный метод разделения и экстраполяции потенциальных полей // Теория и методика геофизических исследований. - Киев: Наукова думка, 1974. - с.19-29.
52. Черный А. В., Гольцев В. Г. О восстановлении производных гармонических функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, по приближенно заданным их значениям в регулярной сети точек вещественной оси. ч.1-5 // Геофиз. журн. 1979. 1, №2. - с.48-56; 1980. 2, №1. - с.38-47; 1982. 4, №6. с.78-86; 1985. 7, №3. - с.80-88.
53. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. 20, №6. - с.819-842.
54. Иванов В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. 20, №6. - с.793-818.
55. Иванов В. К. Распределение особенностей потенциала и пространственный аналог теоремы Полиа // Матем. сб. 1956. 40 (82), №3. - с.319-338.
56. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. - 92 с.
57. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: Наука, 1980. -288 с.
58. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. Н. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. - М.: Наука, 1978. -206 с.
59. Тихонов А. Н., Арсенин В. Н. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 288 с.
60. Прилепко Л. И. К теории обратных задач обобщенных потенциалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.- Новосибирск, 1968.-32 с.
61. Страхов В. Н. Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976, №3. - с.54-68.
62. Страхов В. Н. Эквивалентность в обратной задаче гравиметрии и возможность ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий. ч.1-2 // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980, №2. - с.44-64; №9. - с. 36-69.
63. Страхов В. Н. Об устойчивых методах решения линейных задач геофизики. ч.1-2 // Изв. АН СССР.Физика Земли. 1990, №7. - с.3-27; №8. - с.37-64.
64. Цирульский А. В., Никонова Ф. И., Федорова Н. В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с использованием эквивалентных семейств решений. - Свердловск: изд. УНЦ Ин-т геофизики АН СССР, 1980. - 136 с.
65. Цирульский А. В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей. - Л.: изд. ЛГУ, 1989. -96 с.
66. Чередниченко В. Г. Плоские обратные задачи теории потенциала: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - М. 1983. - 18 с.
67. Черный А. В. Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Киев, 1992. - 34 с.
68. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. - М.: изд. МГУ, 1984. - 112 с.
69. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. - Киев: Наукова думка, 1978. - 223 с.
70. Оганесян С. М. Теория и численные методы решения трехмерных задач гравиметрии:

Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Киев, 1987.- 36 с.
71. Балк П. И. Детерменистские модели интерпретации гравитационных полей. - Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1989. -34 с.
72. Булах Е. Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий. - Киев: Наукова думка, 1973.- 112 с.
73. Голиздра Г. Я. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земной коры.- М.: Недра, 1988. 212 с.
74. Кобрунов А. И. Экстремальные классы в задачах гравиметрии и их использование для построения плотностных моделей геологических сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Киев. 1985. - 49 с.
75. Корчагин И. Н. Методы автоматизированного подбора и их использование при интерпретации геофизических данных: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Киев, 1994. - 48 с.
76. Алексидзе М. А. Редукция силы тяжести. - Тбилиси: изд. Мецниереба, 1965. - 256 с.
77. Черный А. В. О редуцировании значений силы тяжести: Автореф. дис. ... канд. геол.-мин. наук. - Новосибирск, 1970. - 20 с.
78. Черный А. В. Об уравнении силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1970, №2. - с. 145-148.
79. Черный А. В. Конструкция главного фундаментального решения уравнения силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1970, №3. - с.237-239.
80. Черный А. В. Редуцирование значений силы тяжести с земного рельефа на некоторую внешнюю поверхность // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1970. №:. - с.519-521.
81. Черный А. В. О вычислении аномалий силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1970. №8. - с.708-710.
82. Черный А. В. Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1982. №4. - с.18-21.
83. Чорний А. В. Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісник Київського університету. Геологія. 1995. Вип.13. - с.72-80.
84. Алексидзе М. А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. - Тбилиси: изд. Мецниереба, 1985. - 412 с.
85. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971. - 512 с.
86. Картвелишвили К. М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли.- М.: Наука, 1982. - 94 с.
87. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.-744 с.
88. Рис Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979. - 592 с.
89. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - М.: Физматгиз, 1959. - 232 с.
90. Старостенко В. И., Кислинская О. А. Интеграл Шварца для полосы и его приложения в геофизике // Докл. НАН Украины. - 1993. - №10. - С. 126-129.
91. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.-М.: Наука, 1987.-240 с.
92. Черный А. В. Об одном способе решения систем линейных уравнений с прямоугольными матрицами и его использовании при интерпретации геофизических данных // Геофиз. журн., 1980, 2, № 2.-с. 46-59.
93. Старостенко В. И., Кислинская О. А. Интеграл Шварца для полосы и его приложения в геофизике // Геофиз. журн. - 1993. - Т. 15, №4. - С. 12-22.
94. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Интегральное уравнение обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности //Докл. АН УССР, сер. Б, 1988, №2, с. 25 - 28.
95. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Условия однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности //Докл.

АН УССР, Сер. Б. 1988, № 3, с. 26 - 30.
96. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности //Докл. АН УССР, сер. Б, 1988, № 6, с. 30 - 33.
97. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Линеаризованная постановка обратной задачи потенциала для контактной поверхности //Докл. АН УССР, сер. Б, 1988, № 7, с.17 - 21.
98. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Характеристические свойства оператора прямой задачи для контактной поверхности //Докл. АН УССР, сер. Б, 1990, № 3, с.17 - 20.
99. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Регулярные способы решения уравнения для контактной поверхности //Докл. АН УССР, сер. Б, 1990, № 4, с. 26 - 29.
100. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Построение регулярного способа решения уравнения для контактной поверхности в случае задания поля на коротком интервале //Докл. АН УССР, сер. Б, 1990, № 5, с. 28 - 31.
101. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Обратная задача теории логарифмического потенциала для контактной поверхности. — В кн. Интерпретация гравитационных и магнитных полей. — Киев: Наукова думка, 1922. С. 200 - 235.
102. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. 1 - 3 //Изв. РАН. Физика Земли. — 1992, № 6, с. 48 - 58; 1993, № 7, с. 47 - 56; 1993, № 7, с. 57 - 66.
103. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики .— М.: ГИТТЛ, 1953, —416 с.
104. Сретенский А. Н. Теория ньютоновского потенциала. — М. -Л.: ГИТТЛ, 1946. -320 с.
105. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.— 632 с.
106. Березин Н.С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Наука, 1966, т. 1.— 632 с.
107. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.